

REGULARITÄT
IN BENZ-EBENEN

Martin Funk
aus Erlangen

1980

1980 # 392

REGULARITÄT IN BENZ-EBENEN

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades**

**vorgelegt von
Martin Funk
aus Erlangen**

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 12.5.1980

Vorsitzender der Promotions-

kommission:

Prof.Dr. H.Wegener

Erstberichterstatter:

Prof.Dr. K.Strambach

Zweitberichterstatter:

Prof.Dr. P.Plaumann

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung II

§ 1 Perspektivitäten und Projektivitäten
in Benz-Ebenen 1

§ 2 Freie Benz-Ebenen 11

§ 3 Regularität in freien Benz-Ebenen 15

§ 4 Die Regularitätsbedingung (P_5)
in Benz-Ebenen 40

§ 5 Die Regularitätsbedingung (P_4)
in Benz-Ebenen 50

Literaturverzeichnis 71

Einleitung

Der v.Staudtsche Standpunkt läßt sich in der Geometrie als Prinzip formulieren, auf die Güte einer Struktur durch das Studium allgemeiner Einbettungseigenschaften entsprechender Teilstrukturen zu schließen. Für Inzidenzgeometrien bietet sich das Fixpunktverhalten der Gruppe der Projektivitäten eines Blockes (als Teilstruktur interpretiert) auf sich als Einbettungseigenschaft an.

Der auf G.K.Ch.v.Staudt zurückgehende Fundamentalsatz der projektiven Geometrie charakterisiert die papposschen projektiven Ebenen durch die Regularitätsbedingung (P_3):

"Jede Projektivität mit drei Fixpunkten ist die Identität" [22], man vergleiche auch [9] und [17].

Für freie und offene projektive Ebenen zeigte A.Barlotti die Gültigkeit von (P_6), so daß sich aus dieser Bedingung kein nicht trivialer offener Schließungssatz mehr ableiten läßt [1]. A.Schleiermacher gelang schließlich der Nachweis, daß in projektiven Ebenen aus (P_5) bereits der Satz von Pappos folgt [17].

Eine weitere interessante Sorte von Inzidenzgeometrien sind die Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen, die ursprünglich von verschiedenen Modellen abgeleitet wurden und ein sehr voneinander abweichendes Begriffssystem entwickelten, heute aber nicht zuletzt durch die Arbeiten von W.Benz [3] als Inzidenzgeometrien begrifflich in einer einheitlichen Weise definiert und verstanden werden und zusammenfassend als Benz-Ebenen bezeichnet werden.

Ein dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie entsprechender klassischer v.Staudtscher Satz charakterisiert die miquelschen Benz-Ebenen durch die Regularitätsbedingung (P_3) . Dieses Ergebnis von H.Freudenthal und K.Strambach [8] läßt sich in mancher Hinsicht noch verallgemeinern.

Man unterscheidet dazu in Benz-Ebenen verschiedene Untergruppen der Gruppe Π der Projektivitäten:

Affine und eigentliche Perspektivitäten, die aus bijektiven Zuordnungen der Punkte eines Kreises auf die Kreise eines geeignet gewählten Berührbüschels (mit genau einem Zentrum) bzw. eines Schnittbüschels (mit zwei verschiedenen Zentren) und gegebenenfalls auf Parallelklassen der Zentren im letzteren Fall zusammengesetzt sind, erzeugen die Gruppen Π_a der affinen Projektivitäten bzw. Π_e der eigentlichen Projektivitäten, die in den miquelschen Benz-Ebenen hinreichend großer Ordnung gleich sind [13].

Eine Charakterisierung miquelscher Benz-Ebenen durch die Bedingung (P_3) allein für die Gruppe Π_e bewies H.-J.Kroll, ferner konnte er zeigen, daß sich miquelsche Minkowski-Ebenen auch durch (P_3) allein für die Gruppe Π_a kennzeichnen lassen, und daß in allen Benz-Ebenen aus (P_3) für Π_a in jeder affinen Ableitung der Satz von Pappos folgt; vgl. [13] und [14].

Nachdem jetzt für Benz-Ebenen klassische v.Staudtsche Sätze in verschiedenen Variationen bekannt sind, gehen wir in der vorliegenden Arbeit der Frage nach, wie ein v.Staudt-Schleiermacherscher Satz für Benz-Ebenen zu lauten hat.

Dazu müssen wir zunächst die Verhältnisse in freien Benz-

Ebenen klären.

Mit den Methoden von A. Barlotti, A. Schleiermacher und K. Strambach [1], [18], [19] gelangen wir zu dem (etwas überraschenden) Ergebnis, daß in freien Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen die Gruppen Π und Π_e stets sechs-regulär operieren und die Gruppe Π_a fünf-regulär.

Ein wichtiger Schlüssel zum Beweis sind dabei solche Darstellungen von Projektivitäten als Produkte von Perspektivitäten, die keine trivialen Elemente der Form $\alpha\alpha^{-1}$ mehr enthalten. Dazu wurde die Definition eines dritten Perspektivitätentyps notwendig, der durch das Produkt zweier eigentlicher Perspektivitäten mit identischen Zentrenmengen entsteht, wenn man den Zwischenbildkreis wegläßt. Wir nennen diese Perspektivität frei, im projektiven Abschluß einer geeignet gewählten affinen Ableitung entspricht sie einer zentralen Perspektivität, und es gilt stets $\Pi_f \leq \Pi_e$.

Als weitere Ergebnisse erhalten wir dabei noch

$\Pi = \langle \Pi_e, \Pi_a \rangle$ und $\Pi_a \cap \Pi_e = \{\text{id}\}$, sowie, daß die Gruppen Π , Π_e und Π_f und die entsprechenden Stabilisatoren Γ^5 , Γ_e^5 und Γ_f^5 auf fünf Punkten freie Gruppen vom Rang $\aleph_0$ sind.

Wir können also die folgende Vermutung als den Satz von v. Staudt-Schleiermacher für Benz-Ebenen formulieren:

"Eine Benz-Ebene ist miquelsch, wenn die Gruppe der Projektivitäten fünf-regulär operiert".

Schließlich erhalten wir auf die Frage, welche Schließungssätze die Regularitätsbedingungen (P_5) und (P_4) in Benz-Ebenen nach sich ziehen, die folgenden Ergebnisse vom

v. Staudt-Schleiermacherschen Typ als interessante Verallgemeinerungen bisher bekannter Resultate:

Der Satz von Pappos folgt in einer beliebigen affinen Ableitung bereits aus (P_5) für Π_f , und der Satz von Miquel folgt wenigstens schon aus (P_4) für Π_e .

In dieser Arbeit wurde ein besonderer Wert auf eine einheitliche Beweisführung für alle Sorten von Benz-Ebenen gelegt, was sich beim Studium der freien Benz-Ebenen bewährt hat.

Gewisse Grenzen in der Leistungsfähigkeit dieser Methode treten erst bei v. Staudt-Schleiermacherschen Sätzen auf, insbesondere beim Versuch, Projektivitäten mit möglichst vielen Fixpunkten zu konstruieren, ohne dabei geschlossene Teilstrukturen zu erzeugen. Es bleibt die Hoffnung, beim Studium einzelner Sorten von Benz-Ebenen noch weitergehende Ergebnisse zu erzielen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Karl Strambach für die Überlassung des Themas, das rege Interesse und die klärenden Gespräche herzlich danken.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546209_0015

§ 1 Perspektivitäten und Projektivitäten in Benz-Ebenen

Vorbemerkungen: (1) Benz-Ebenen (d.h. Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen) lassen sich sowohl durch Inklusionsrelationen axiomatisieren, die man in der klassischen synthetischen Geometrie bevorzugt (vgl. [8], [11]), als auch durch Inzidenzrelationen, die zum Beispiel bei freien Erweiterungen handlicher sind (vgl. [12], [18], [19]). Üblicherweise verwendet man in der Literatur jedoch die Sprechweisen "Element", "sich schneiden", "liegen auf", "gehen durch" bzw. "inzidieren mit" unabhängig vom gewählten Axiomensystem nebeneinander.

Da wir in der vorliegenden Arbeit neben klassischen (miquel-schen) auch freie Benz-Ebenen betrachten, wollen wir uns diesem Brauch anschließen. Die Definitionen (1.2) und (1.3) dienen dazu, für diese Arbeit eine einheitliche Bezeichnungsweise für beide Axiomensysteme und für alle drei Klassen von Benz-Ebenen bereitzustellen.

(2) Ist von einer konkreten Anzahl n von Punkten, Kreisen, Ovalen, Parallelklassen oder Geraden die Rede, so wollen wir dies stets im Sinn von " n paarweise verschiedene" verstehen.

(1.1) Definition: Eine Inzidenzstruktur, bestehend aus einer Menge $\mathbb{P}$ von Punkten, einer Menge $\mathbb{K}$ von Kreisen, einer Inzidenzrelation $I \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{K}$ und einer Indexmenge J mit $0 \leq |J| = n \leq \aleph$, heißt eine Kreisstruktur mit n Punktparallelitäten, wenn gilt:

(1) Mit je drei Punkten inzidiert höchstens ein Kreis.

(2) In $\mathbb{K}$ ist eine Berühr-Relation ρ erklärt mit:

- (i) Für A, B aus $\mathbb{K}$ mit $A \rho B$ folgt $A = B$ oder die Existenz genau eines Punktes c mit $A I c I B$.
- (ii) Für einen festen Punkt a ist ρ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller mit a inzidierenden Kreise.
- (3) In $\mathbb{P}$ sind n verschiedene Parallelitätsrelationen $\parallel_j$ mit $j \in J$ erklärt, so daß gilt:
 - (i) Jede Parallelität ist eine nicht triviale Äquivalenzrelation auf $\mathbb{P}$.
 - (ii) Für je zwei Punkte a und b mit $a \parallel_j b$, $j \in J$, existiert kein Kreis C mit $a I C I b$.

(1.2) Definition: Eine Kreisstruktur mit zwei verschiedenen Punktparallelitäten in $\mathbb{P}$ heißt Minkowski-Ebene, wenn die folgenden Axiome gelten:

- (K) Mit je drei nicht parallelen Punkten inzidiert mindestens ein Kreis.
- (B) Zu einem Kreis A und zwei nicht parallelen Punkten a, b mit $a I A \nexists b$ existiert stets genau ein Berührungskreis B mit $A \rho B$ und $a I B I b$.
- (R₃) In $\mathbb{P}$ existieren mindestens drei nicht parallele Punkte.
- (E) Zu einem Kreis A und einem Punkt b mit $b \nexists A$ existiert für jede Punktparallelität $\parallel_j$ stets genau ein Punkt a mit $a \parallel_j b$ und $a I A$.
- (D) Für zwei Punkte a und b existiert stets genau ein Punkt c mit $a \parallel_1 c \parallel_2 b$.

Eine Kreisstruktur mit einer Punktparallelität in $\mathbb{P}$ heißt Laguerre-Ebene, wenn die Axiome (K), (B), (E) gelten sowie:

- (R₄) In $\mathbb{P}$ existieren mindestens vier nicht parallele Punkte,

die nicht alle mit einem Kreis inzidieren.

Eine Kreisstruktur ohne Punktparallelität in $\mathbf{P}$ heißt Möbius-Ebene, wenn die Axiome (K) , (B) und (R_4) gelten.

Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen bezeichnet man zusammenfassend auch als Benz-Ebenen $\mathcal{B} = (\mathbf{P}, \mathbf{K}, I, J, \rho)$.

(1.3) Definition: Sei $\mathbf{P}$ eine Menge, deren Elemente wir Punkte nennen, und J eine Indexmenge mit $0 \leq |J| = n \leq 2$. Auf $\mathbf{P}$ seien n verschiedene nicht triviale Partitionen erklärt, die entsprechenden Äquivalenzrelationen $\parallel_j$, $j \in J$, nennen wir Parallelitäten mit den Äquivalenzklassen $[a]_j$ für a aus $\mathbf{P}$. Schließlich sei $\mathbf{K}$ eine nicht leere Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbf{P}$, deren Elemente wir Kreise nennen.

Für $n = 2$ heißt das Tripel $(\mathbf{P}, \mathbf{K}, J)$ Minkowski-Ebene, wenn die folgenden Axiome gelten:

(K') Zu je drei nicht parallelen Punkten a, b und c existiert genau ein Kreis K mit $a, b, c \in K$.

(B') Zu einem Kreis A und zwei nicht parallelen Punkten a, b mit $a \in A \nparallel b$ existiert stets genau ein Kreis B mit $A \cap B = \{a\}$ und $a, b \in B$. Wir nennen B den Berührkreis an A in a durch b .

(R_3) In $\mathbf{P}$ existieren mindestens drei nicht parallele Punkte.

(B') Zu einem Kreis A und einem Punkt b mit $b \nparallel A$ existiert für alle j aus J stets genau ein Punkt a mit $[b]_j \cap A = \{a\}$.

(D') Für zwei Punkte a und b existiert stets genau ein Punkt c mit $[a]_1 \cap [b]_2 = \{c\}$.

Für $n = 1$ heißt das Tripel $(\mathbf{P}, \mathbf{K}, J)$ Laguerre-Ebene,

wenn die Axiome (K') , (B') , (E') sowie (R_4) aus (1.2) gelten. Für $n = 0$ heißt das Tupel (P, K) Möbius-Ebene, wenn die Axiome (K') , (B') und (R_4) gelten.

Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen bezeichnet man zusammenfassend als Benz-Ebenen $B = (P, K, J)$; vgl. [11], Fußnote auf Seite 45, sowie [3].

(1.4) Definition: Für eine Benz-Ebene $B = (P, K, J)$ führen wir folgende Bezeichnungen ein, die sich mühelos auf das Axiomensystem von (1.2) übertragen lassen:

$$[a] := \{a\} \cup \bigcup_{j \in J} [a]_j \quad \text{für } a \in P;$$

$$(a, A) := \{B \in K / B \cap A = \{a\}\} \quad \text{Berührungsbüschel}$$

für $a \in P, A \in K$ mit $a \in A$:

$(a, A; b)$ sei der Berührungskreis an A in a durch b

für $b \in P \setminus [a]$;

$$(a, b) := \{C \in K / a, b \in C\} \quad \text{Schnittbüschel}$$

für $a, b \in P$ mit $a \notin [b]$:

(a, b, c) sei der Verbindungskreis der drei Punkte a, b und c

für $c \in P \setminus ([a] \cup [b])$.

(1.5) Definition: Sei $B = (P, K, J)$ eine Benz-Ebene und a ein Punkt. Wir setzen:

$$P_a := P \setminus [a]$$

$$K_a := \{A \setminus [a] / a \in A \in K\} \quad \text{sowie für } J \neq \emptyset :$$

$$E_a := \{[b]_j \setminus [a] / j \in J, b \in P_a\}.$$

Dann ist $B_a := (P_a, K_a \cup E_a)$ mit der von B induzierten Inklusion eine affine Ebene mit der Punktmenge P_a und der Geradenmenge $K_a \cup E_a$ und heißt die affine Ableitung von B

im Punkt a ; vgl. [8], [11], [13], [14].

Die Punkte der uneigentlichen Geraden U des projektiven Abschlusses $\overline{\mathbb{B}}_a$ von $\mathbb{B}_a$ sind genau die von den Berührbüscheln (a, A) mit $a \in A \in \mathbb{K}$ induzierten Scharen paralleler Geraden von $\mathbb{B}_a$ sowie im Fall $J \neq \emptyset$ zusätzlich die Scharen

$$u_j := \{[b]_j \setminus [a] / b \in \mathbb{P}_a\} \quad \text{mit } j \in J.$$

In $\overline{\mathbb{B}}_a$ behalten wir für $u \in U$ die Bezeichnung uneigentlicher Punkt bei und nennen jeden Punkt $b \notin U$ (d.h. $b \in \mathbb{P}_a$) eigentlich. Der Ableitungspunkt a wird in der Literatur häufig mit dem Symbol ω bezeichnet.

In $\mathbb{B}$ sind alle Kreise gleichmächtig, die um 1 verminderte Kardinalzahl eines Kreises heißt die Ordnung von $\mathbb{B}$, es gilt:

$$\text{Ord.}\mathbb{B} = \text{Ord.}\mathbb{B}_a = \text{Ord.}\overline{\mathbb{B}}_a;$$

vgl. [11], Seite 46, und [16], Seite 287.

Für jeden Kreis B mit $a \notin B$ ist die Punktmenge

$$B' := (B \setminus [a]) \cup \{u_j / j \in J\}$$

ein Oval in $\overline{\mathbb{B}}_a$:

Denn jede Gerade von $\overline{\mathbb{B}}_a$ schneidet B' in höchstens zwei Punkten, und für jeden Punkt b auf B' existiert genau eine Gerade $\text{Tg}(b, B')$ von $\overline{\mathbb{B}}_a$ mit $\text{Tg}(b, B') \cap B' = \{b\}$:

Für $b \notin u_j$, $j \in J$, wird $\text{Tg}(b, B')$ von $(b, B; a)$ induziert, für $|J| = 1$ ist $\text{Tg}(u_1, B') = U$, und

für $|J| = 2$ wird $\text{Tg}(u_1, B')$ von der Parallelklasse

$\{[a]_j \cap B\}_1$ aus $\mathbb{B}$ mit $\{i, j\} = J$ induziert; vgl. [13].

Wir nennen die Gerade $\text{Tg}(b, B')$ die Tangente im Punkt b an das Oval B' . Die Menge aller Ovale von $\overline{\mathbb{B}}_a$, die von Kreisen aus $\mathbb{K}$ induziert werden, bezeichnen wir mit $\mathbb{K}'_a$.

Schließlich sei $\overline{bc} := (a, b, c)'$ für je zwei Punkte $b, c \in \mathbb{P}_a$.

(1.5) Definition: Sei $B = (P, K, J)$ eine Benz-Ebene.

Für zwei Kreise A und B sowie zwei Punkte $z_1 \in A \setminus B$ und $z_2 \in B \setminus A$ mit $z_1 \notin [z_2]$ heißt die folgende Bijektion α von A auf B eigentliche Perspektivität mit den Zentren z_1, z_2 und dem Büschel (z_1, z_2) :

$$\alpha : x \mapsto \begin{cases} (z_1, z_2, x) \cap B \setminus \{z_2\} & \text{falls } x \notin [z_2] \text{ und} \\ & |(z_1, z_2, x) \cap B| = 2 \\ z_2 & \text{falls } x \notin [z_2] \text{ und} \\ & |(z_1, z_2, x) \cap B| = 1 \\ [z_1]_j \cap B & \text{falls } x \in [z_2]_i \text{ mit} \\ & \{i, j\} = J, \end{cases}$$

wobei im Fall $x = z_1$ der Kreis (z_1, z_2, x) durch den Berührungskreis $(z_1, A; z_2)$ zu ersetzen ist; vgl. [13].

Für zwei Kreise A und B mit $z_s \in A \cap B \neq \emptyset$ und einen Punkt $z_f \notin A \cup B$ heißt die folgende Bijektion β von A auf B freie Perspektivität mit dem Schnittzentrum z_s , dem freien Zentrum z_f und dem Büschel (z_s, z_f) :

$$\beta : x \mapsto \begin{cases} (z_s, z_f, x) \cap B \setminus \{z_s\} & \text{falls } x \notin [z_f] \text{ und} \\ & |(z_s, z_f, x) \cap B| = 2 \\ z_s & \text{falls } x \notin [z_f] \text{ und} \\ & |(z_s, z_f, x) \cap B| = 1 \\ [z_f]_j \cap B & \text{falls } x \in [z_f]_i \text{ für} \\ & j \in J, \end{cases}$$

wobei im Fall $x = z_s$ der Kreis (z_s, z_f, x) durch den Berührungskreis $(z_s, A; z_f)$ zu ersetzen ist.

Für zwei Kreise A und B mit $z \in A \cap B \neq \emptyset$ und einen Kreis C mit $z \in C \neq A, B$ heißt die folgende Bijektion γ von A auf B affine Perspektivität mit dem Büschel (z, C) :

$$\gamma : x \mapsto \begin{cases} (z, C; x) \cap B \setminus \{z\} & \text{falls } x \neq z \\ z & \text{falls } x = z \end{cases}.$$

Jede Perspektivität ist durch die Angabe des Urbildkreises A , des Bildkreises B und des abbildenden Büschels eindeutig festgelegt, und wir schreiben $\alpha = [A, (z_1, z_2), B]$,

$\beta = [A, (z_s, z_f), B]$ bzw. $\gamma = [A, (z, C), B]$; vgl. auch [8].

Bei Produkten (d.h. Hintereinanderausführung) von Perspektivitäten $\alpha = [A, X_1, B]$, $\beta = [B, X_2, C]$ schreiben wir die Bezeichnungen für die einzelnen Perspektivitäten von links nach rechts nebeneinander:

$$\alpha\beta = [A, X_1, B][B, X_2, C]$$

und dementsprechend das Argument ganz links:

$$(x)\alpha\beta = (x)[A, X_1, B][B, X_2, C].$$

Gelegentlich schreiben wir x^α statt $(x)\alpha$.

Diese Definitionen übertragen sich ebenfalls mühelos auf das Axiomensystem von (1.2).

(1.7) Bemerkung: In einer Benz-Ebene B gilt für Produkte von Perspektivitäten mit identischen Büscheln folgende Kürzungsregel: Für $\alpha_1 = [A, X, B]$ und $\alpha_2 = [B, X, C]$ ist

$$\alpha_1\alpha_2 = [A, X, B][B, X, C] = [A, X, C].$$

Dabei gilt:	α_1	α_2	$\alpha_1\alpha_2$
	eigentlich	eigentlich	frei
	eigentlich	frei	eigentlich
	frei	eigentlich	eigentlich
	frei	frei	frei
	affin	affin	affin

als unmittelbare Folge von Definition (1.6).

Jede freie Perspektivität $[A, (z_s, z_f), B]$ läßt sich daher als Produkt zweier eigentlicher Perspektivitäten darstellen, indem man durch das freie Zentrum z_f einen weiteren Kreis C mit $z_s \notin C$ legt:

$$[A, (z_s, z_f), B] = [A, (z_s, z_f), C][C, (z_f, z_s), B].$$

Eine freie Perspektivität $\beta = [A, (z_s, z_f), B]$ besitzt stets genau einen Fixpunkt, denn das Schnittpunktzentrum z_s von β ist genau dann Fixpunkt von β , wenn $A \rho B$ gilt.

(1.8) Bemerkung: Sei $\mathcal{B} = (P, \mathbb{K}, J)$ eine Benz-Ebene und $\mathbb{B}_\omega$ ihre affine Ableitung im Punkt $\omega \in P$.

Jede eigentliche Perspektivität vom Kreis A mit $\omega \in A$ auf den Kreis B mit $\omega \notin B$ mit den Zentren $z \in B \setminus A$ und ω aus $\mathcal{B}$ läßt sich in $\overline{\mathbb{B}_\omega}$ als stereographische Projektion von der Geraden A' auf das Oval B' mit Projektionszentrum $z \in B'$ auffassen, wenn man die Punkte ω und $B \cap [\omega]_j$ von $\mathcal{B}$ mit den Punkten $A' \cap U$ bzw. u_j in $\overline{\mathbb{B}_\omega}$ identifiziert, $j \in J$. Wir bezeichnen diese stereographische Projektion mit $[A', z, B']$; vgl. [13].

Analog induziert jede freie Perspektivität vom Kreis A auf den Kreis B mit dem Schnittpunktzentrum $\omega \in A \cap B$ und einem freien Zentrum $z \notin A \cup B$ aus $\mathcal{B}$ die zentrale Perspektivität von der Geraden A' auf die Gerade B' mit dem Zentrum z in $\overline{\mathbb{B}_\omega}$, wenn man den Punkt $\omega \in A \cap B$ von $\mathcal{B}$ durch die Punkte $A' \cap U$ bzw. $B' \cap U$ in $\overline{\mathbb{B}_\omega}$ ersetzt. Auch diese zentrale Perspektivität bezeichnen wir mit $[A', z, B']$; vgl. [9], [13] und [16].

Die Restriktion einer beliebigen affinen Perspektivität γ des

Kreises A auf den Kreis B mit dem Zentrum $\omega \in A \cap B$ und dem Berührbüschel (ω, U) auf $\mathbb{B}_\omega$ ist die Parallelperspektivität von der Geraden A' auf die Gerade B' in der Richtung der Geraden U : in $\mathbb{B}_\omega$ induziert γ eine zentrale Perspektivität mit einem von u_j , $j \in J$, verschiedenen Zentrum auf U , die den Punkt $A' \cap U$ auf den Punkt $B' \cap U$ abbildet; vgl. [8], [13].

(1.9) Definition: Sei $\mathbb{B}$ eine Benz-Ebene.

Ein Produkt von Perspektivitäten $\alpha_i = [A_{i-1}, X_i, A_i]$ mit $i = 1, \dots, l$ heißt Projektivität vom Kreis A_0 auf den Kreis A_l in der Darstellung

$$(\pi) \quad \pi = \prod_{i=1}^l \alpha_i = \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_i]$$

mit der Länge l . Die Darstellung (π) heißt gekürzt, wenn

$A_{i-1} \nmid A_i$ und $X_{i-1} \nmid X_i$ für alle $i = 1, \dots, l$ gilt.

Jede Projektivität besitzt eine gekürzte Darstellung: Durch iterative Anwendung der Kürzungsregel (1.7) und der trivialen Kürzungsregel

$$[A, X, B][B, X, A] = \text{id}$$

erhält man nach endlich vielen Schritten eine gekürzte Darstellung, wobei sich die Länge der Darstellung bei jeder Kürzung um 1 oder 2 erniedrigt.

Eine gekürzte Darstellung der Identität ist das leere Produkt.

Für einen Kreis A bezeichne $\Pi(A)$ die Gruppe der Projektivitäten von A auf sich: Für je zwei Kreise A und B sind die Gruppen $\Pi(A)$ und $\Pi(B)$ konjugiert unter jeder Perspektivität von A auf B , also insbesondere isomorph. Wir schreiben daher einfach Π statt $\Pi(A)$. Π operiert auf den Punkten jedes Kreises dreifach transitiv, wenn die Ordnung von $\mathbb{B}$ hinreichend

groß ist; vgl. [8], [13], [14].

Analog bezeichnen Π_a und Π_f die Gruppen der affinen bzw. der freien Projektivitäten, die von den affinen bzw. den freien Perspektivitäten erzeugt werden. Wir bemerken noch, daß wegen (1.7) die Gruppe Π_e , die von den eigentlichen Perspektivitäten erzeugt wird, die Gruppe Π_f als Untergruppe enthält, und daß die Gruppen Π_a , Π_f und Π_e Untergruppen von Π sind.

(1.10) Bemerkung: Sei B eine Benz-Ebene. Eine gekürzte Darstellung einer Projektivität π eines Kreises $A_0 = A_1$ auf sich mit der Länge $l \in \mathbb{N}$

$$\pi = \prod_{i=1}^l \alpha_i = \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_i]$$

mit $X_1 = X_l$ (was übrigens $l \geq 4$ impliziert) läßt sich als Darstellung einer Projektivität π' des Kreises A_1 auf sich auffassen, konjugiert unter der Perspektivität α_1 :

$$\begin{aligned} \pi &= [A_0, X_1, A_1] \prod_{i=2}^{l-1} [A_{i-1}, X_i, A_i] [A_{l-1}, X_l, A_l] \\ &= [A_0, X_1, A_1] \prod_{i=2}^{l-1} [A_{i-1}, X_i, A_i] [A_{l-1}, X_1, A_0] \\ &= [A_0, X_1, A_1] \underbrace{\prod_{i=2}^{l-1} [A_{i-1}, X_i, A_i] [A_{l-1}, X_1, A_1]}_{\pi'} [A_1, X_1, \hat{A}_0] \\ &= \alpha_1 \quad \pi' \quad \alpha_1^{-1}. \end{aligned}$$

Daher dürfen wir für gekürzte Darstellungen von Projektivitäten eines Kreises auf sich mit der Länge $l \in \mathbb{N}$ zusätzlich $X_1 \neq X_l$ voraussetzen.

§ 2 Freie Benz-Ebenen

(2.1) Definition: Seien $\mathbb{L}^i = (\mathbb{P}^i, \mathbb{K}^i, \mathbb{I}^i, //^i_j (j \in J), \rho^i)$ mit $i = 1, 2$ zwei Kreisstrukturen. Wir sagen, $\mathbb{L}^1$ ist eine Teilstruktur von $\mathbb{L}^2$ und schreiben $\mathbb{L}^1 \subseteq \mathbb{L}^2$ genau dann, wenn $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$, $\mathbb{K}^1 \subseteq \mathbb{K}^2$, $\mathbb{I}^1 \subseteq \mathbb{I}^2$ gilt und wenn die Relationen ρ^1 und $//^1_j$ mit $j \in J$ die Restriktionen der entsprechenden Relationen ρ^2 auf $\mathbb{K}^1$ bzw. $//^2_j$ auf $\mathbb{P}^1$ sind.

(2.2) Definition: Sei $\mathbb{L} = (\mathbb{P}, \mathbb{K}, \mathbb{I}, J, \rho)$ eine Kreisstruktur.

Für einen Punkt a und einen Kreis B definieren wir

$$\begin{aligned} \mu^{\mathbb{L}}(a) &:= \left| \left\{ A / A \in \mathbb{K}, A \mathbb{I} a \right\} \right| + \\ &+ \left| \left\{ (a, A) / A \in \mathbb{K}, A \mathbb{I} a, |(a, A)| \geq 2 \right\} \right| + \\ &+ \left| \left\{ [a]_j / j \in J, |[a]_j| \geq 2 \right\} \right| ; \\ \mu^{\mathbb{L}}(B) &:= \left| \left\{ b / b \in \mathbb{P}, b \mathbb{I} B \right\} \right| + \\ &+ \left| \left\{ (b, B) / b \in \mathbb{P}, b \mathbb{I} B, |(b, B)| \geq 2 \right\} \right| . \end{aligned}$$

Ein Punkt a oder ein Kreis B heißen hyperfrei in $\mathbb{L}$, wenn

$\mu^{\mathbb{L}}(a) \leq 2$ bzw. $\mu^{\mathbb{L}}(B) \leq 3$, sowie frei in $\mathbb{L}$, wenn

$\mu^{\mathbb{L}}(a) = 2$ bzw. $\mu^{\mathbb{L}}(B) = 3$; vgl. [19].

(2.3) Definition: Eine nicht leere Kreisstruktur heißt geschlossen, wenn sie aus endlich vielen Elementen besteht, und in ihr keine hyperfreien Elemente existieren; eine Kreisstruktur heißt offen, wenn sie keine geschlossenen Teilstrukturen enthält.

(2.4) Definition: Eine aufsteigende, abzählbare Folge

$\mathbb{L}^0 \subseteq \mathbb{L}^1 \subseteq \mathbb{L}^2 \subseteq \mathbb{L}^3 \subseteq \dots$ von Kreisstrukturen mit je

$|J| = n$ Punktparallelitäten heißt Erweiterungsprozess, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ die Elemente von $L^i \setminus L^{i-1}$ untereinander keine Inzidenzen eingehen, und $\bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$ heißt Erweiterung von L^0 .

Ein Element aus $\bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$ hat die Stufe k , wenn es in L^k , nicht aber in L^{k-1} vorkommt.

Ein Erweiterungsprozess heißt (hyper)frei, wenn für jedes $i \in \mathbb{N}$ alle Elemente der Stufe i in L^i (hyper)frei sind.

(2.5) Lemma: Jede geschlossene Teilstruktur L einer (hyper-) freien Erweiterung $\bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$ liegt bereits in L^0 .

Beweis: L ist nicht leer und besteht nun aus endlich vielen Elementen, daher existiert ein Element y mit maximaler Stufe m in L . Für $m > 0$ wäre y (hyper)frei in L^m und wegen $L \subseteq L^m$ (hyper)frei in L .

Also haben alle Elemente von L die Stufe null.

(2.6) Definition: Sei $L^0 = (P^0, K^0, I^0, //^0_j (j \in J), \rho^0)$ eine offene Kreisstruktur mit $0 \leq |J| = n \leq 2$, die das Reichhaltigkeitsaxiom (R_4) für $n \leq 1$ bzw. (R_3) für $n = 2$ erfüllt.

Wir definieren rekursiv eine aufsteigende Folge von Kreisstrukturen $L^i = (P^i, K^i, I^i, //^i_j, \rho^i)$: den natürlichen freien Erweiterungsprozess:

Es sei $L^1 = (P^1, K^1, I^1, //^1_j, \rho^1)$ mit $i = (3 + n) \cdot m$ und $m = 0, 1, 2, \dots$ bereits definiert:

$$(1) \mathbb{P}^{i+1} := \mathbb{P}^i$$

$\mathbb{K}^{i+1}$ entsteht, indem man zu je drei nicht parallelen Punkten p, q und r aus $\mathbb{P}^i$, zu denen noch kein Kreis K aus $\mathbb{K}^i$ existiert mit $p, q, r \in K$, einen Kreis K zu $\mathbb{K}^i$ hinzufügt, der genau die Relationen $p, q, r \in K$ und $K \rho^{i+1} K$ erfüllt.

Ferner gelte mit $k = 1$:

$$(\sharp) \begin{cases} a \in I^{i+k} B : \Leftrightarrow a \in I^{i+k-1} B & \text{für } a \in \mathbb{P}^{i+k-1} \text{ und } B \in \mathbb{K}^{i+k-1}; \\ a \parallel_j^{i+k} b : \Leftrightarrow a \parallel_j^{i+k-1} b & \text{für } a, b \in \mathbb{P}^{i+k-1} \text{ und } j \in J; \\ A \rho^{i+k} B : \Leftrightarrow A \rho^{i+k-1} B & \text{für } A, B \in \mathbb{K}^{i+k-1}. \end{cases}$$

$$(2) \mathbb{P}^{i+2} := \mathbb{P}^{i+1}$$

$\mathbb{K}^{i+2}$ entsteht, indem man zu jedem Berührbüschel (p, K) aus $\mathbb{L}^{i+1}$ und jedem Punkt q aus $\mathbb{P}^{i+1}$, $q \not\parallel_j^{i+1} p$, für die noch kein Kreis L aus (p, K) existiert mit $q \in L$, einen Kreis L zu $\mathbb{K}^{i+1}$ hinzufügt, der genau die Relationen $p, q \in L$ und $K, L \rho^{i+2} L$ erfüllt, $j \in J$.

Ferner gelte $(\sharp)$ für $k = 2$.

$$(3) \mathbb{K}^{i+3} := \mathbb{K}^{i+2}$$

$\mathbb{P}^{i+3}$ entsteht, indem man zu je zwei Kreisen K und L aus $\mathbb{K}^{i+2}$ mit $K \not\parallel^{i+2} L$ und $|\{a \in \mathbb{P}^{i+2} / a \in I^{i+2} K, L\}| = 1$ einen Punkt p zu $\mathbb{P}^{i+2}$ hinzufügt, der genau die Relationen $p \in I^{i+3} K, L$ und $p \parallel_j^{i+3} p$ für $j \in J$ erfüllt.

Außerdem können zu je zwei Kreisen K und L aus $\mathbb{K}^{i+2}$ mit $K \not\parallel^{i+2} L$ und $\{a \in \mathbb{P}^{i+2} / a \in I^{i+2} K, L\} = \emptyset$ zwei Punkte p und q zu $\mathbb{P}^{i+2}$ hinzugefügt werden, die genau die Relationen $p, q \in I^{i+3} K, L$, $p \parallel_j^{i+3} p$ und $q \parallel_j^{i+3} q$ für

$j \in J$ erfüllen.

Ferner gelte $(\sharp)$ für $k = 3$.

(4) Im Fall $n \geq 1$:

$$\mathbb{K}^{i+4} := \mathbb{K}^{i+3}$$

$\mathbb{P}^{i+4}$ entsteht, indem man für alle j aus J zu jedem Kreis K aus $\mathbb{K}^{i+3}$ und jedem Punkt p aus $\mathbb{P}^{i+3}$ mit $p \perp^{i+3} K$, für die noch kein Punkt q aus $\mathbb{P}^{i+3}$ mit $q \parallel_j^{i+3} p$ und $q \perp^{i+3} K$ existiert, einen Punkt q zu $\mathbb{P}^{i+3}$ hinzufügt, der genau die Relationen $q \parallel_j^{i+4} p, q \perp^{i+4} K$ (sowie $q \parallel_1^{i+4} q$ mit $j \neq 1 \in J$ im Fall $n = 2$) erfüllt.

Ferner gelte $(\sharp)$ für $k = 4$.

(5) Im Fall $n = 2$:

$$\mathbb{K}^{i+5} := \mathbb{K}^{i+4}$$

$\mathbb{P}^{i+5}$ entsteht, indem man zu je zwei Punkten p und q aus $\mathbb{P}^{i+4}$, zu denen noch kein Punkt r aus $\mathbb{P}^{i+4}$ existiert mit $p \parallel_1^{i+4} r \parallel_2^{i+4} q$, einen Punkt r zu $\mathbb{P}^{i+4}$ hinzufügt, der genau die Relationen $r, p \parallel_1^{i+5} r \parallel_2^{i+5} q, r$ erfüllt.

Ferner gelte $(\sharp)$ für $k = 5$.

Dann ist $B := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{L}^i$ je nach dem Wert von n eine Möbius-, Laguerre- oder Minkowski-Ebene und heißt freie Benz-Ebene (bzw. freie Möbius-, Laguerre- oder Minkowski-Ebene; vgl. [12] und [19]).

§ 3 Regularität in freien Benz-Ebenen

(3.1) Definition: Sei $\mathbb{B} = (\mathbb{P}, \mathbb{K}, I, J, \rho)$ eine Benz-Ebene und

$$\pi = \prod_{i=1}^l \alpha_i = \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_i]$$

eine gekürzte Darstellung einer Projektivität π vom Kreis A_0 auf den Kreis A_1 mit der Länge $l \in \mathbb{N}$. Die zu dieser Darstellung und einer endlichen Menge

$$\mathbb{M} = \{ a_k^0 / a_k^0 I A_0, k = 1, \dots, m \} \quad m \in \mathbb{N}$$

von Punkten auf A_0 gehörende Konfiguration $\mathbb{M}(\pi, \mathbb{M})$ ist diejenige Teilstruktur von $\mathbb{B}$, die genau aus den folgenden Elementen besteht mit $i = 0, \dots, l, k = 1, \dots, m$, vgl [1]:

den Trägerkreisen A_i ,

den Bildpunkten a_k^i mit $a_k^i I A_i$ und

$$a_k^i := (a_k^0) \left(\prod_{v=1}^i \alpha_v \right),$$

den Zentren von X_i ($i \neq 0$): z_1^i, z_2^i bzw. z_f^i, z_s^i bzw. z^i ;

den zu den Bildpunkten a_k^{i-1} und a_k^i gehörenden Projektionskreisen B_k^i aus X_i (sofern sie existieren) mit

$$a_k^{i-1}, a_k^i I B_k^i \quad (i \neq 0).$$

Falls α_i eine eigentliche oder freie Perspektivität ist, und der Bildpunkt a_k^{i-1} parallel zum Zentrum z_2^i bzw. z_f^i von α_i liegt, nennen wir die Punktparallellklassen von a_k^{i-1} und von a_k^i sowie von den Zentren $z_{2,f}^i$ und $z_{1,f}^i$ Projektionsparallelklassen.

Für die endliche Kreisstruktur $\mathbb{M}(\pi, \mathbb{M})$ definieren wir eine absteigende Folge $\mathbb{M}_0 \supseteq \mathbb{M}_1 \supseteq \mathbb{M}_2 \supseteq \mathbb{M}_3 \supseteq \dots$ von Kreisstrukturen rekursiv durch

$$\mathbb{M}_0 := \mathbb{M}(\pi, \mathbb{M}) \quad \text{und für } v = 0, 1, 2, 3, \dots :$$

(1) $\mathbb{M}_{2v+1}$ entsteht aus $\mathbb{M}_{2v}$, indem man in $\mathbb{M}_{2v}$ alle hyper-

freien Kreise wegläßt.

- (2) M_{2v+2} entsteht aus M_{2v+1} , indem man in M_{2v+1} alle hyperfreien Punkte wegläßt.

Die Relationen in M_{v+1} sind die Restriktionen der Relationen von M_v auf M_{v+1} .

Diese Folge wird nach endlich vielen Schritten stationär, d.h. es existiert ein $v_0 \in \mathbb{N}$ mit $M_\lambda = M_{\lambda+1}$ für alle $\lambda \geq v_0$, und M_{v_0} ist entweder eine geschlossene Kreisstruktur oder leer.

- (3.2) Bemerkung: Im Folgenden sei $B = (P, K, I, J, \rho)$ eine Benz-Ebene mit $0 \leq |J| = n \leq 2$, π eine Projektivität von einem Kreis A_0 aus B auf sich in der gekürzten Darstellung

$$\pi = \prod_{i=1}^l \alpha_i = \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_i]$$

der Länge $l \in \mathbb{N}$ mit $A_0 = A_l$, $X_1 \neq X_l$, der Fixpunktmenge

$$M = \{ a_k^0 / a_k^0 \mid A_0, k = 1, \dots, m, m \geq 4 \}$$

mit $a_k^1 = a_k^0$, $k = 1, \dots, m$, und $M_0 := M(\pi, M)$.

Die Möglichkeiten für die Existenz von in M_0 freien Punkten sind sehr beschränkt: Zentren sind nie frei, und Bildpunkte a_k^i höchstens dann, wenn sie durch zusammenfallende Projektionskreise $B_k^i = B_k^{i+1}$ oder zusammenfallende Projektionsparallelklassen $[z_{1,f}^i]_j = [z_{2,f}^{i+1}]_j$, $j \in J$, mit α_i auf A_i hinauf und mit α_{i+1} von A_i weg abgebildet werden. Für eine genaue Betrachtung im folgenden Lemma sei $\alpha_0 := \alpha_1$.

- (3.3) Lemma: (1) Zu einem Trägerkreis A_i aus M_0 existieren zwei in M_0 freie Bildpunkte a_λ^i und a_λ^i , $i \in \mathbb{Z} / 1\mathbb{Z}$ und $\lambda \in \{1, \dots, m\}$, genau dann, wenn gilt:

- (i) $n = 2$ (d.h. $\mathbb{B}$ ist Minkowski-Ebene) ;
- (ii) α_i und α_{i+1} sind eigentliche oder freie Perspektivitäten, und es gilt für eine geeignete Wahl von κ, λ :
 $z_{1,f}^i = z_{2,f}^{i+1}$ und $a_\kappa^i \parallel_1 z_{1,f}^i \parallel_2 a_\lambda^i$;
- (iii) Die Punkte a_κ^i und a_λ^i inzidieren in $\mathbb{M}_0$ nur mit A_i ,
 und a_κ^i (bzw. a_λ^i) ist zu keinem anderen Punkt aus $\mathbb{M}_0$
 2-parallel (bzw. 1-parallel).

Im Fall (1) sind alle anderen Bildpunkte a_k^i auf A_i in $\mathbb{M}_0$
 nicht hyperfrei, $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\kappa, \lambda\}$.

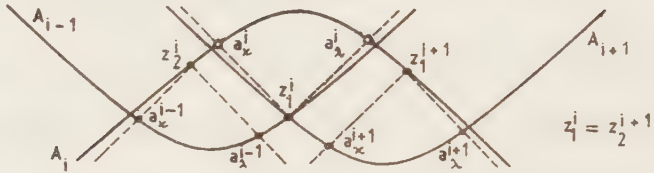
Trifft (1) nicht zu, so bleibt höchstens genau eine der beiden folgenden Möglichkeiten:

- (2) Auf dem Trägerkreis A_i existiert genau ein in $\mathbb{M}_0$ freier
 Bildpunkt a_k^i , $k \in \{1, \dots, m\}$, wenn gilt:
 - (i) $n \geq 1$ (d.h. $\mathbb{B}$ ist Laguerre- oder Minkowski-Ebene) ;
 - (ii) α_i und α_{i+1} sind eigentliche oder freie Perspektivitäten, und es gilt $a_k^i \parallel_j z_{1,f}^i, z_{2,f}^{i+1}$ für ein $j \in J$;
 - (iii) Der Punkt a_k^i inzidiert in $\mathbb{M}_0$ nur mit A_i und ist im
 Fall $n = 2$ zu keinem anderen Punkt aus $\mathbb{M}_0$
 j' -parallel mit $J = \{j, j'\}$.
- (3) Auf dem Trägerkreis A_i existiert genau ein in $\mathbb{M}_0$ freier
 Bildpunkt a_k^i , $k \in \{1, \dots, m\}$, wenn gilt:
 - (i) $B_k^i = B_k^{i+1}$ (d.h. die mit A_i inzidierenden Zentren
 von α_i und α_{i+1} fallen zusammen) ;
 - (ii) Der Punkt a_k^i inzidiert in $\mathbb{M}_0$ nur mit A_i sowie B_k^i und
 ist zu keinem anderen Punkt aus $\mathbb{M}_0$ parallel.

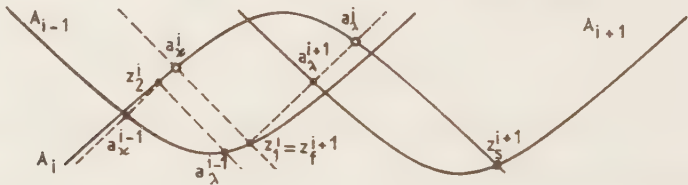
Im Fall (3) folgt für diejenige Teilstruktur $\mathbb{M}'$ von $\mathbb{M}_0$, die
 genau aus dem Kreis B_k^i und allen Zentren von α_i und α_{i+1} be-
 steht: $\mu^{\mathbb{M}'}(B_k^i) \geq 3$.

Beispiele:

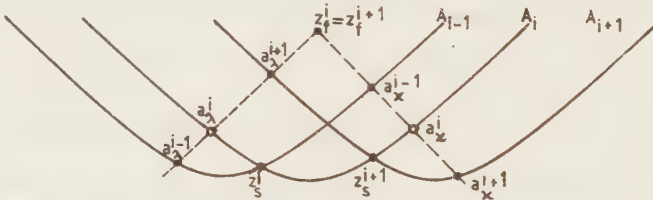
Fall (1) mit $n = 2$ und α_i, α_{i+1} eigentlich:



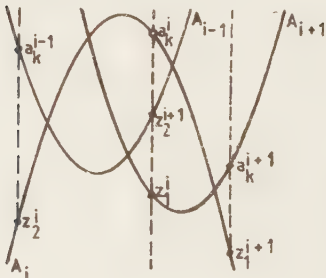
Fall (1) mit $n = 2$, α_i eigentlich und α_{i+1} frei:



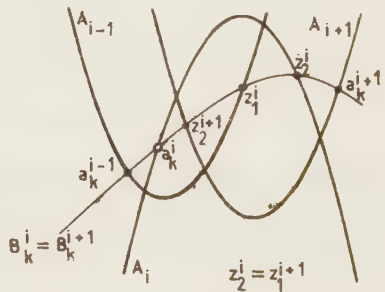
Fall (1) mit $n = 2$ und α_i, α_{i+1} frei:



Fall (2) für $n = 1$ und α_i, α_{i+1} eigentlich:



Fall (3) für $n = 1$ und α_i, α_{i+1} eigentlich:



Beweis: (a) Die Fälle (1) und (2) fassen wir zunächst zum Fall (2') zusammen, der aus (2) entsteht, indem man "genau ein" durch "mindestens ein" ersetzt.

Außerdem stellen wir als unmittelbare Folgerung aus (1.6) und (2.2) fest, daß die Bedingungen (i), (ii) und (iii) jeweils notwendig und hinreichend für die Existenz der angegebenen Bildpunkte und deren Freiheit in M_0 sind, und daß außer unter den in (2') oder (3) beschriebenen Bedingungen keine weiteren hyperfreien Bildpunkte in M_0 existieren.

(b) Wir zeigen zuerst, daß sich auf A_i die Fälle (2') und (3) gegenseitig ausschließen, $i \in \mathbb{Z} / 1\mathbb{Z}$:

Angenommen, der Bildpunkt a_λ^i erfüllt (2') und der Bildpunkt a_λ^i erfüllt (3).

Aus (2')(ii) folgt: α_i und α_{i+1} sind eigentlich, und es gilt

$$z_{1,f}^i \not\parallel_j z_{2,f}^{i+1} \text{ für ein } j \in J \neq \emptyset ;$$

Aus (3)(i) folgt:

$$z_{1,f}^i, z_{2,f}^{i+1} \in B_\lambda^i = B_\lambda^{i+1} ;$$

Insgesamt also:

$$z_{1,f}^i = z_{2,f}^{i+1} .$$

Diese beiden Zentren sind genau diejenigen von α_i und α_{i+1} , die nicht mit A_i inzidieren. Wegen der gekürzten Darstellung von π gilt $X_i \neq X_{i+1}$ und daher für die auf A_i liegenden Zentren von α_i und α_{i+1} : $z_{2,s}^i \neq z_{1,s}^{i+1}$.

Wegen (3)(ii) fällt kein anderer Punkt aus M_0 mit a_λ^i zusammen, es gilt also:

$$z_{2,s}^i \neq z_{1,s}^{i+1} \neq a_\lambda^i \neq z_{2,s}^i .$$

Daraus ergibt sich aber der Widerspruch:

$$B_\lambda^i = B_\lambda^{i+1} = (a_\lambda^i, z_{2,s}^i, z_{1,s}^{i+1}) = A_i .$$

(c) Wir müssen noch die maximale Anzahl von in M_0 freien Bildpunkten a_k^i unter der Bedingung (2') bzw. (3) ermitteln:

Für (2') ist sie genau $n = |J|$, denn jede Perspektivität bildet höchstens n Punkte durch Projektionsparallelklassen ab. Dabei ergibt sich (1), wenn man in Minkowski-Ebenen die Bedingung (2') an zwei Bildpunkte a_λ^i und a_λ^i , $\lambda, \lambda \in \{1, \dots, m\}$, stellt: Aus

$$a_\lambda^i //_1 z_{1,f}^i, z_{2,f}^{i+1} \quad \text{und} \quad a_\lambda^i //_2 z_{1,f}^i, z_{2,f}^{i+1}$$

folgt mit Axiom (D)

$$z_{1,f}^i = z_{2,f}^{i+1}.$$

Für (3) ist diese maximale Anzahl genau 1:

Angenommen, zwei Bildpunkte a_λ^i und a_λ^i erfüllen jeweils die Bedingung (3); Dann folgt jedoch aus

$$B_\lambda^{i+1} = B_\lambda^i \neq B_\lambda^i = B_\lambda^{i+1}$$

der Widerspruch

$$X_i = X_{i+1}.$$

(d) Zum Beweis der Zusatzbehauptung von (3) unterscheiden wir nach den Typen der Perspektivitäten α_i und α_{i+1} (eigentlich (e), frei (f) oder affin (a)): Ist $\alpha_i \alpha_{i+1}$ vom Typ (e)(e), (e)(f), (f)(e), (f)(f) oder (a)(a), so folgt aus

$$\mu^{M'}(B_k^i) \leq 2$$

der Widerspruch

$$X_i = X_{i+1};$$

Für $\alpha_i \alpha_{i+1}$ vom Typ (a)(e), (e)(a), (a)(f) oder (f)(a) gilt stets

$$\mu^{M'}(B_k^i) \geq 3.$$

(3.4) Bemerkung: Ist der Bildpunkt $a_k^{i-1} = a_k^i$ aus M_0 ein Fixpunkt der Perspektivität α_i , $i \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, so ist der Projektionskreis B_k^i genau dann frei in M_0 , wenn B_k^i abgesehen von a_k^i und den Zentren von α_i mit keinem anderen Punkt aus M_0 inzidiert und nur dann, wenn α_i affin ist, im Zentrum z^i von α_i von anderen Kreisen aus M_0 berührt wird. Gegebenenfalls ist der Bildpunkt a_k^i genau dann frei in M_1 , wenn a_k^i in M_1 abgesehen von A_i nur noch mit A_{i-1} inzidiert, zu keinem anderen Punkt aus M_1 parallel ist, und A_i den Kreis A_{i-1} nicht berührt. (Dabei sei wieder $\alpha_0 := \alpha_1$.)

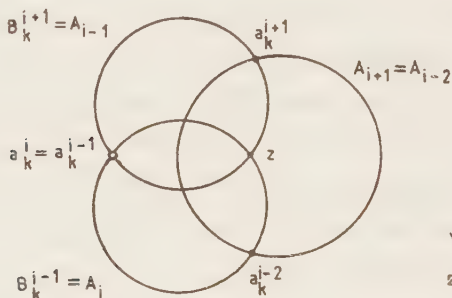
(3.5) Lemma: Für jeden in M_1 freien Fixpunkt $a_k^{i-1} = a_k^i$ von α_i , $i \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, gilt:
Ist der von a_k^i verschiedene Punkt z , der mit A_i und A_{i-1} inzidiert, kein Zentrum von M_0 , so sind A_i und A_{i-1} die einzigen Trägerkreise in M_0 und es gilt $a_k^v = a_k^i$ für alle $v \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $a_k^{i-v-1} \neq a_k^{i-v} = \dots = a_k^{i-1} = a_k^i = \dots = a_k^{i+t} \neq a_k^{i+t+1}$,
 $v, t \in \mathbb{N}_0$ mit $0 < v+t \leq l-2$, wobei die oberen Indices modulo l zu nehmen sind.

Wegen der Freiheit von a_k^i in M_1 fallen die Projektionskreise B_k^{i-v} und B_k^{i+t+1} mit den Trägerkreisen A_{i-1} und A_i zusammen, einer dieser beiden Kreise ist Projektionskreis der Perspektivität α_{i-v} bzw. α_{i+t+1} , während der andere als Trägerkreis bei α_{i-v} bzw. α_{i+t+1} fungiert, so daß der von a_k^i verschiedene, mit A_i und A_{i-1} inzidierende Punkt z Zentrum der Per-

spektivitäten α_{i-v} bzw. $\alpha_{i+\tau+1}$ ist, da der in M_1 freie Bildpunkt a_k^1 nicht Zentrum sein kann.



$v = 1$ und $\tau = 0$:
 z ist Zentrum von
 α_{i-1} und α_{i+1}

- (2) $a_k^v = a_k^1$ für alle $v \in \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, d.h. der Bildpunkt a_k^1 ist unter jeder Perspektivität α_v Fixpunkt. Dann folgt aus der Freiheit von a_k^1 in M_1 unmittelbar, daß M_1 und damit M_0 nur die Trägerkreise $A_1 = A_{i+2} = A_{i+4} = \dots$ sowie $A_{i-1} = A_{i-1+2} = A_{i-1+4} = \dots$ enthält.

- (3.6) Satz: In einer freien Benz-Ebene existiert keine Projektivität eines Kreises auf sich mit einer gekürzten, nicht leeren Darstellung, die sechs Punkte einzeln festläßt.

Beweis: Angenommen, es existiert in einer freien Benz-Ebene $\mathbb{B}$ eine Projektivität π eines Kreises A_0 auf sich in der gekürzten Darstellung

$$\pi = \prod_{i=1}^l \alpha_i = \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_1]$$

der Länge $l \in \mathbb{N}$ mit $A_0 = A_1$, $X_1 \neq X_1$, der Fixpunktmenge

$$M = \{ a_k^0 = (a_k^0)\pi = a_k^1 / a_k^0 \cap A_0, k = 1, \dots, 6 \}$$

und der Konfiguration $\mathbb{M}_0 := \mathbb{M}(\pi, M)$.

Wir werden beweisen, daß $\mathbb{M}_3$ eine (nicht leere) geschlossene Teilstruktur von $\mathbb{M}_0$ und damit von $\mathbb{B}$ ist im Widerspruch zu (2.5) und (2.6).

Wir vereinbaren noch die abkürzende Schreibweise $\mu^v(\)$ an Stelle von $\mu^{\mathbb{M}_v}(\)$ für $v = 0, 1, 2, 3$. Außerdem setzen wir $\alpha_0 := \alpha_1$, so daß die Indexmenge für die Trägerkreise A_i und die Perspektivitäten α_i stets $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ ist.

(1) Zuerst stellen wir für die Zentren von α_i fest:

$$\begin{array}{ll} \alpha_i \text{ eigentlich:} & \mu^0(z_1^i) \cong 7, \quad \mu^0(z_2^i) \cong 7; \\ \alpha_i \text{ frei:} & \mu^0(z_s^i) \cong 6, \quad \mu^0(z_f^i) \cong 6; \\ \alpha_i \text{ affin:} & \mu^0(z^i) \cong 8. \end{array}$$

Neben den Zentren von α_i ist in $\mathbb{M}_0$ auch kein Trägerkreis A_i frei, da A_i mindestens mit den je sechs Bildpunkten a_k^i inzidiert.

(2) Projektionskreise von Fixpunkten $a_k^{i-1} = a_k^i$ der Perspektivität α_i können jedoch in $\mathbb{M}_0$ frei sein.

Daher gilt in $\mathbb{M}_1$:

$$\begin{array}{ll} \alpha_i \text{ eigentlich:} & \mu^1(z_1^i) \cong 5, \quad \mu^1(z_2^i) \cong 5; \\ \alpha_i \text{ frei:} & \mu^1(z_s^i) \cong 5, \quad \mu^1(z_f^i) \cong 5; \\ \alpha_i \text{ affin:} & \mu^1(z^i) \cong 7. \end{array}$$

Die Zentren und die Trägerkreise von $\mathbb{M}_0$ sind in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfrei.

(3) Behauptung: In $\mathbb{M}_2$ ist kein Trägerkreis A_i hyperfrei.

Beweis: Außer den (bereits in $\mathbb{M}_0$) freien Bildpunkten nach

Lemma (3.3) können in $\mathbb{M}_1$ auf A_i auch Fixbildpunkte

$a_\lambda^{i-1} = a_\lambda^i$ und $a_\lambda^i = a_\lambda^{i+1}$ der Perspektivitäten α_i bzw. α_{i+1} frei sein, wenn deren Projektionskreise B_λ^i bzw. B_λ^{i+1} in $\mathbb{M}_0$

frei waren und daher in M_1 fehlen. Wir unterscheiden drei Fälle:

- (i) A_1 inzidiert in M_1 mit höchstens einem freien Fixbildpunkt.

Lemma (3.3) gestattet auf A_1 für α_i oder α_{i+1} affin höchstens einen und für α_i und α_{i+1} eigentlich oder frei höchstens zwei weitere in M_1 freie Bildpunkte. Es bleiben auf A_1 mindestens vier bzw. drei in M_1 nicht hyperfreie Bildpunkte und mindestens ein Zentrum von α_i und α_{i+1} übrig.

Daher ist A_1 in M_2 nicht hyperfrei, wenn man noch folgendes Argument berücksichtigt:

Fällt ein Bildpunkt a_k^i mit einem Zentrum der Perspektivität α_i oder α_{i+1} zusammen, und ist diese Perspektivität eigentlich oder frei, so gilt $|(a_k^i, A_i)| \geq 2$.

- (ii) A_1 inzidiert in M_1 mit zwei oder mehr freien Fixbildpunkten, und M_1 enthält mehr als zwei Trägerkreise.

Nach Lemma (3.5) können auf A_1 von den insgesamt vier möglichen Fixbildpunkten nur genau zwei in M_1 frei sein, etwa

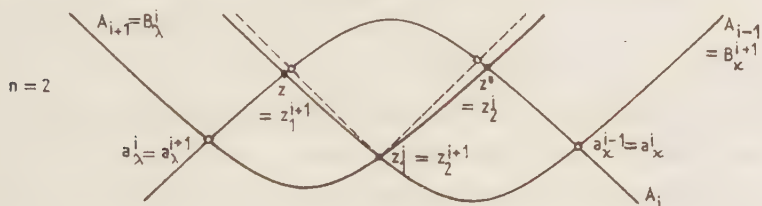
$$a_{\lambda}^{i-v-1} \neq a_{\lambda}^{i-v} = \dots = a_{\lambda}^i \neq a_{\lambda}^{i+1} = \dots = a_{\lambda}^{i+\tau} \neq a_{\lambda}^{i+\tau+1}$$

mit $v, \tau \in \mathbb{N}$ und $2 \leq v + \tau \leq 1 - 2$, während die davon verschiedenen Punkte z und z' , die mit A_{i-1} und A_i bzw. mit A_i und A_{i+1} inzidieren, Zentren der Perspektivitäten α_i bzw. α_{i+1} sind, wobei man die oberen Indices modulo 1 lese. Gilt außerdem $A_{i-1} = A_{i+1}$, so ist nur noch $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i$ in M_1 frei im Widerspruch zur Voraussetzung von (ii), es gilt also $A_{i-1} \neq A_{i+1}$.

Sind z und z' verschieden, so gestattet Lemma (3.3) nur für α_i und α_{i+1} eigentlich oder frei höchstens zwei weitere in

$\mathbb{M}_1$ freie Bildpunkte, und es bleiben auf A_i mindestens zwei in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte sowie die Zentren z und z' übrig. Also ist A_i in $\mathbb{M}_2$ (mit dem Argument von (i)) nicht hyperfrei.

Der in (3.3) unter (3) beschriebene Fall scheidet hier wegen $z \neq z'$ aus, so daß für α_i oder α_{i+1} affin mindestens vier in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte neben den Zentren z und z' auf A_i übrigbleiben, und A_i in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei ist.



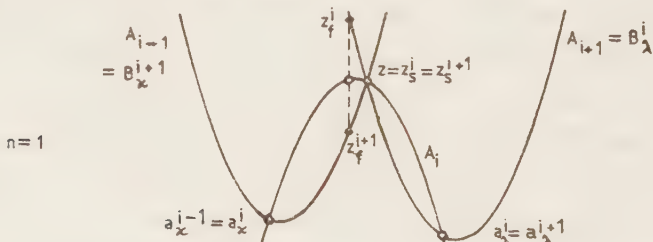
Fällt das Zentrum z mit dem Zentrum z' zusammen, so können wegen $z \in A_{i-1}, A_i, A_{i+1}$ die Perspektivitäten α_i und α_{i+1} nur frei oder affin sein.

Sind für $z = z'$ die Perspektivitäten α_i und α_{i+1} frei, so gestattet Lemma (3.3) auf A_i nur höchstens einen weiteren in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkt, denn die beiden anderen Zentren von α_i und α_{i+1} sind wegen $X_i \neq X_{i+1}$ verschieden: $z_f^i \neq z_f^{i+1}$. Ist für $z = z'$ eine der Perspektivitäten α_i und α_{i+1} affin und die andere frei, so gestattet Lemma (3.3) höchstens einen weiteren in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkt auf A_i .

Es bleiben auf A_i mindestens drei in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte und das Zentrum z übrig. Mit dem Argument aus (i) folgt, daß A_i in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei ist.

Sind schließlich für $z = z'$ die Perspektivitäten α_i und α_{i+1} affin, so gestattet Lemma (3.3) keinen weiteren in $\mathbb{M}_1$

freien Bildpunkt a_k^i auf A_i mehr, da die Bedingung $B_k^i = B_k^{i+1}$ hier $X_i \neq X_{i+1}$ widerspricht. Es bleiben auf A_i mindestens vier in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte neben z übrig, so daß A_i in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei ist.



(iii) A_i inzidiert in $\mathbb{M}_1$ mit zwei freien Fixbildpunkten, und $\mathbb{M}_1$ enthält genau zwei Trägerkreise.

Die beiden in $\mathbb{M}_1$ freien Fixbildpunkte $a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$ und $a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$ sind dann Fixpunkte von π und von jeder Perspektivität α_v , $v \in \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, und alle α_v sind eigentlich.

Wir wenden Lemma (3.3) an:

Entweder gestattet (2) bzw. (3) auf A_i einen weiteren in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkt, und es bleiben auf A_i drei in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte und ein Zentrum von α_i und α_{i+1} übrig; Oder (1) gestattet auf A_i zwei weitere in $\mathbb{M}_1$ freie Bildpunkte, denn für $|J| = 2$ folgt bereits $z_1^i = z_2^{i+1}$ aus $z_1^i \parallel_j z_2^{i+1}$ für $j \in J \neq \emptyset$ wegen $A_{i-1} = A_{i+1}$. Im letzten Fall folgt aus $X_i \neq X_{i+1}$ für die mit A_i inzidierenden Zentren von α_i und α_{i+1} : $z_2^i \neq z_1^{i+1}$, so daß auf A_i zwei in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte und die beiden Zentren z_2^i und z_1^{i+1} übrigbleiben.

Daher ist A_i (mit dem Argument von (i)) in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei.

(4) Bemerkung: Nicht triviale Punktparallelklassen aus $\mathbb{M}_1$ werden in $\mathbb{M}_2$ einpunktig, wenn sie außer einem Zentrum z genau noch einen in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkt enthielten. Außerdem können nach der Wegnahme der in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkte a_k^i mit $B_k^i = B_k^{i+1}$ diese Projektionskreise $B_k^i = B_k^{i+1}$ in $\mathbb{M}_2$ frei werden, wenn die Bildpunkte a_k^{i-1} und a_k^{i+1} geeignet mit den Zentren auf $B_k^i = B_k^{i+1}$ zusammenfallen.

Daher gilt für Zentren z aus $\mathbb{M}_1$: $\mu^1(z) \cong \mu^2(z) \cong \mu^3(z)$.

(5) Abschätzung von $\mu^2(z)$ für alle Zentren z aus $\mathbb{M}_2$:

Dabei genügt es, für $i \in \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ jeweils die nicht mit A_i inzidierenden Zentren der (eigentlichen oder freien) Perspektivitäten α_i und α_{i+1} zu betrachten: die mit A_i inzidierenden Zentren spielen entweder die analoge Rolle für $i-1$ oder $i+1$, oder es handelt sich bei ihnen um (Schnittpunkt-)Zentren z' freier oder affiner Perspektivitäten mit $\mu^1(z') = \mu^2(z')$.

Für alle hier betrachteten Zentren z von $\mathbb{M}_2$ werden wir zusätzlich auch $\mu^3(z)$ abschätzen, wenn $\mu^2(z) = 4$ möglich ist. Seien also α_i und α_{i+1} eigentliche oder freie Perspektivitäten:

Die Werte von $\mu^1(z_{1,f}^i)$ und $\mu^1(z_{2,f}^{i+1})$ ändern sich nur, wenn auf A_i mindestens ein in $\mathbb{M}_1$ freier Bildpunkt

$a_k^i \parallel_j z_{1,f}^i, z_{2,f}^{i+1}$ für ein $j \in J \neq \emptyset$ existiert, und alle zu $z_{1,f}^i$ j -parallelen Punkte von $\mathbb{M}_1$ (außer a_k^i) in einem Punkt $z := z_{1,f}^i = z_{2,f}^{i+1}$ zusammenfallen.

$\mu^2(z)$ wird minimal, wenn unter dieser Bedingung außer der höchstmöglichen Anzahl von in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkten

$a_k^i \parallel_j z$ für $j \in J$ noch möglichst viele Bildpunkte (in $\mathbb{M}_1$ nicht notwendig freie) Fixpunkte der Perspektivitäten α_i und

α_{i+1} ohne Projektionskreise in $\mathbb{M}_1$ sind. Wir unterscheiden:

- (i) Es gilt: α_i und α_{i+1} sind eigentlich, sowie $A_{i-1} \neq A_{i+1}$. In diesem Fall besitzen α_i und α_{i+1} höchstens je zwei Fixbildpunkte und nach (3.5) höchstens je einen in $\mathbb{M}_1$ freien Fixbildpunkt $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i$ und $a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$, was $z_1^{i+1} \in A_{i-1}, A_i$ und $z_2^i \in A_i, A_{i+1}$ zur Folge hat. Auf A_i bleiben mindestens zwei in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte a_{ξ}^i und a_{η}^i übrig:

Fallen diese beiden Bildpunkte mit den Zentren z_1^{i+1} und z_2^i auf A_i zu Fixpunkten von α_i und α_{i+1} zusammen, etwa

$$a_{\xi}^{i-1} = a_{\xi}^i = z_1^{i+1} \quad \text{und} \quad a_{\eta}^i = a_{\eta}^{i+1} = z_2^i,$$

so folgt die Freiheit in $\mathbb{M}_0$ und das Fehlen in $\mathbb{M}_1$ für

$$B_{\xi}^i = (z, a_{\xi}^i, z_2^i) = (z, z_1^{i+1}, z_2^i) = (z, z_1^{i+1}, a_{\eta}^i) = B_{\eta}^{i+1};$$

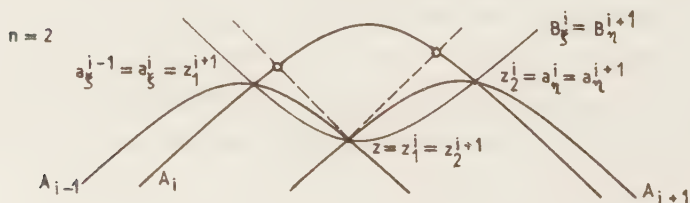
B_{ξ}^{i+1} und B_{η}^i sind hierbei allerdings verschiedene Berührungskreise an A_i in a_{ξ}^i sowie a_{η}^i , so daß $\mu^2(z) \geq 4$ ist wegen

$$z \in A_{i-1}, A_{i+1}, B_{\xi}^{i+1}, B_{\eta}^i.$$

(Da α_i und α_{i+1} eigentlich sind, liegen auf den Berührungskreisen B_{ξ}^{i+1} und B_{η}^i je zwei Zentren von $\mathbb{M}_2$ und ein weiterer Bildpunkt a_{ξ}^{i+1} bzw. a_{η}^{i-1} , oder falls dieser Punkt a_{ξ}^{i+1} bzw. a_{η}^{i-1} in $\mathbb{M}_1$ frei war, je drei Zentren: B_{ξ}^{i+1} und B_{η}^i sind in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei, so daß auch $\mu^3(z) \geq 4$ gilt.)

Fällt höchstens einer der Punkte a_{ξ}^i und a_{η}^i mit den Zentren z_1^{i+1} oder z_2^i auf A_i zu einem Fixpunkt von α_i bzw. α_{i+1} zusammen, etwa $a_{\xi}^i = z_1^{i+1}$, so folgt analog $\mu^2(z) \geq 5$ wegen

$$z \in A_{i-1}, A_{i+1}, B_{\xi}^{i+1}, B_{\eta}^i, B_{\eta}^{i+1}.$$



(11) Es gilt: α_i und α_{i+1} sind eigentlich, und $A_{i-1} = A_{i+1}$.

Auf A_i können (neben den in M_1 freien Bildpunkten $a_k^i //_j z$ für $j \in J$) noch insgesamt zwei in M_1 freie Fixbildpunkte $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$ und $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$ existieren.

Es bleiben auf A_i also mindestens zwei in M_1 nicht hyperfreie Bildpunkte a_{ξ}^i und a_{η}^i übrig:

Fallen diese beiden Bildpunkte mit den Zentren z_1^{i+1} und z_2^i auf A_i zusammen, die in diesem Fall keine Fixpunkte von α_i bzw. α_{i+1} sind, etwa $a_{\xi}^i = z_1^{i+1}$ sowie $a_{\eta}^i = z_2^i$, so folgt

$B_{\xi}^i = (z, a_{\xi}^i, z_2^i) = (z, z_1^{i+1}, z_2^i) = (z, z_1^{i+1}, a_{\eta}^i) = B_{\eta}^{i+1}$ und wegen $A_{i-1} = A_{i+1}$ noch $a_{\xi}^{i-1} = a_{\eta}^{i+1} : B_{\xi}^{i+1}$ und B_{η}^i sind verschiedene Berührungskreise an A_i in a_{ξ}^i sowie a_{η}^i , so

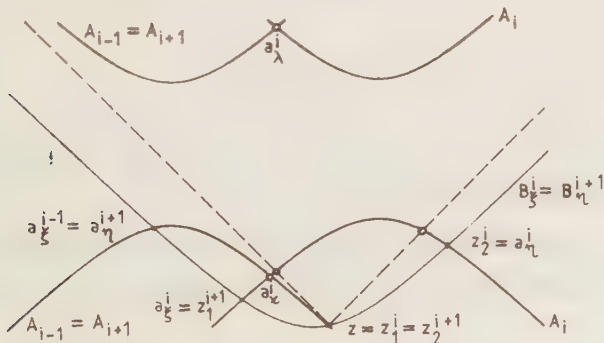
daß $\mu^2(z) \geq 4$ gilt wegen

$$z \in A_{i-1}, B_{\xi}^i, B_{\xi}^{i+1}, B_{\eta}^i.$$

(Der Projektionskreis $B_{\xi}^i = B_{\eta}^{i+1}$ kann in M_2 frei werden, wenn A_{i-1} und A_i die einzigen Trägerkreise von M_2 sind. Daher ist $\mu^3(z) \geq 3$. Durch das Herausfallen von $B_{\xi}^i = B_{\eta}^{i+1}$ werden in M_3 jedoch keine weiteren Punkte frei.)

Fällt höchstens einer der Punkte a_{ξ}^i und a_{η}^i mit den Zentren z_1^{i+1} oder z_2^i auf A_i zusammen, folgt analog $\mu^2(z) \geq 5$ wegen

$$z \in A_{i-1}, B_{\xi}^i, B_{\xi}^{i+1}, B_{\eta}^i, B_{\eta}^{i+1}.$$



(iii) Die Perspektivität α_i ist eigentlich und α_{i+1} frei.

In diesem Fall besitzen α_i höchstens zwei und α_{i+1} höchstens einen Fixbildpunkt, jedoch nur ein Fixpunkt $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i$ von α_i kann freier Bildpunkt in M_1 sein:

Ein Fixbildpunkt $a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$ der freien Perspektivität ist in M_1 nicht hyperfrei, andernfalls wäre

$$A_{i+1} = B_{\lambda}^i \text{ I } z_s^i = z = z_{\lambda}^{i+1} \text{ I } A_{i+1} ;$$

Die Existenz zweier in M_1 freier Fixbildpunkte der eigentlichen Perspektivität α_i impliziert mit Lemma (3.5) zunächst

$A_{i-1} = A_{i+1}$ und scheitert dann an

$$z_s^{i+1} \text{ I } A_i, A_{i-1} = A_{i+1} .$$

Die Freiheit des Fixpunktes $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i$ in M_1 hat

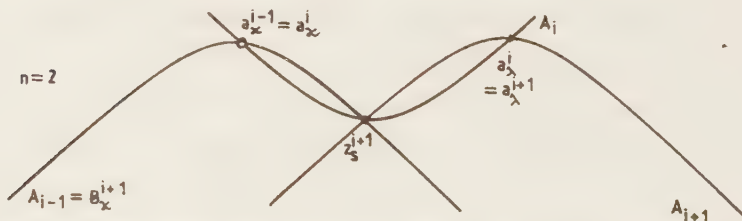
$A_{i-1} = B_{\lambda}^{i+1}$ zur Folge, also

$$z_s^{i+1} \text{ I } A_{i-1}, A_i, A_{i+1} .$$

Es bleiben auf A_i drei in M_1 nicht hyperfreie Bildpunkte a_{ξ}^i , a_{η}^i und a_{λ}^i übrig, genau einer von ihnen kann mit dem Zentrum z_s^{i+1} zusammenfallen und ist dann Fixpunkt von α_i , o.B.d.A.

sei $a_{\xi}^i = z_s^{i+1}$; Es folgt $\mu^2(z) \geq 5$, denn

$$z \text{ I } A_{i-1}, B_{\lambda}^i, B_{\xi}^{i+1}, B_{\eta}^i, B_{\eta}^{i+1} .$$



Analog dazu sieht man den Fall ein, daß α_i freie und α_{i+1} eigentliche Perspektivität ist.

(iv) Die Perspektivitäten α_i und α_{i+1} sind frei.

Die Fixbildpunkte $a_{\lambda}^{i-1} = a_{\lambda}^i$ und $a_{\lambda}^i = a_{\lambda}^{i+1}$ von α_i bzw.

α_{i+1} sind in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfrei, andernfalls wäre $B_{\lambda}^{i+1} = A_{i-1}$ bzw. $B_{\lambda}^i = A_{i+1}$ und damit $z_s^{i+1} = z_s^i$ im Widerspruch zu $X_i \nmid X_{i+1}$.

Es bleiben auf A_i vier in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte auf A_i übrig, außer a_{λ}^i und a_{λ}^i noch a_{ξ}^i und a_{η}^i ;

Auch, wenn o.B.d.A. $a_{\eta}^i = z_s^i$ und $a_{\xi}^i = z_s^{i+1}$ ist, so daß

$$B_{\xi}^i = (z, a_{\xi}^i, z_s^i) = (z, z_s^{i+1}, z_s^i) = (z, z_s^{i+1}, a_{\eta}^i) = B_{\eta}^{i+1}$$

folgt, gilt $\mu^2(z) \geq 5$, denn B_{ξ}^i ist nirgends hyperfrei, und $z \in B_{\lambda}^i, B_{\lambda}^{i+1}, B_{\eta}^i, B_{\xi}^i, B_{\xi}^{i+1}$.

(6) Wie wir schon in (4) bemerkten, können nach dem Wegfall der in $\mathbb{M}_1$ freien Bildpunkte in $\mathbb{M}_2$ Projektionskreise frei werden. Dies ist jedoch an eine Reihe von Voraussetzungen gebunden:

Die in $\mathbb{M}_1$ verbliebenen Projektionskreise B_k^i sind zunächst in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfrei. Da aber auch alle Zentren in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei sind, ist für die Freiheit von B_k^i in $\mathbb{M}_2$ notwendig, daß einer der Bildpunkte a_k^i oder a_k^{i-1} in $\mathbb{M}_1$ frei ist und in $\mathbb{M}_2$ fehlt.

Nach Lemma (3.3) ist dies nur im Fall von $B_k^i = B_k^{i+1}$ oder $B_k^{i-1} = B_k^i$ möglich, womit auf A_i bzw. A_{i-1} in $\mathbb{M}_1$ freie Bildpunkte $a_{\lambda}^i \parallel_j z_{1,f}^i, z_{2,f}^{i+1}$ bzw. $a_{\lambda}^{i-1} \parallel_j z_{1,f}^{i-1}, z_{2,f}^i$ ausgeschlossen sind.

Für die Freiheit von $B_k^i = B_k^{i+1}$ (bzw. $B_k^{i-1} = B_k^i$) in $\mathbb{M}_2$ ist ferner notwendig, daß die Bildpunkte a_k^{i-1} und a_k^{i+1} (bzw. a_k^{i-2} und a_k^i) mit denjenigen Zentren von α_i und α_{i+1} (bzw. α_{i-1} und α_i) zusammenfallen, die mit B_k^i inzidieren.

Dies hat insbesondere zur Folge, daß durch das Wegfallen der in $\mathbb{M}_2$ freien Projektionskreise B_k^i in $\mathbb{M}_3$ keine weiteren

Bildpunkte frei werden, da die Zentren von M_2 auch in M_3 nicht hyperfrei sind:

(7) Abschätzung von $\mu^3(z)$ für alle Zentren z aus M_3 .

Wir unterscheiden für $i \in \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ für jedes Zentrum z der Perspektivitäten α_i und α_{i+1} zwei Fälle:

Entweder erfüllt z die Voraussetzungen von (5) und es folgt, falls $\mu^2(z) = 4$ möglich ist, $\mu^3(z) \geq 3$ aus (5);

Oder aber es gilt zunächst $\mu^1(z) \geq \mu^2(z) \geq 5$ (bzw. sogar $\mu^2(z) \geq 7$, wenn z Zentrum einer affinen Perspektivität ist).

Lemma (3.3) gestattet dann für α_i und α_{i+1} höchstens je einen in M_2 freien Projektionskreis $B_{\chi}^{i-1} = B_{\chi}^i$ (bzw. $B_{\lambda}^i = B_{\lambda}^{i+1}$), so daß für das Zentrum z der Perspektivität α_i bzw. α_{i+1} gilt: $\mu^3(z) \geq 3$, wenn α_i bzw. α_{i+1} eigentlich oder frei ist, und $\mu^3(z) \geq 5$, wenn α_i bzw. α_{i+1} affin ist.

(8) Wir stellen abschließend fest:

In M_3 ist zunächst kein Trägerkreis, kein Projektionskreis und kein Zentrum hyperfrei. Da auch kein Bildpunkt in M_3 hyperfrei wurde, und M_3 noch alle Trägerkreise aus M_0 enthält (d.h. $M_3 \neq \emptyset$), ist M_3 geschlossen.

- (3.7) Korollar: (1) In einer freien Benz-Ebene ist die einzige gekürzte Darstellung der Identität das leere Produkt.
- (2) Die Stabilisatoren Γ^6 , Γ_e^6 und Γ_f^6 von Π , Π_e bzw. Π_f auf sechs Punkten eines Kreises in einer freien Benz-Ebene bestehen nur aus der Identität.
- (3) Der Stabilisator Γ_a^5 von Π_a auf fünf Punkten eines Kreises in einer freien Benz-Ebene besteht nur aus der Identität.
- (4) Jede Projektivität besitzt genau eine gekürzte Darstellung.

Beweis: (1), (2) und (4) folgen unmittelbar aus (3.6).

Um (3) einzusehen, gehen wir von der Annahme aus, es gibt in einer freien Benz-Ebene B eine affine Projektivität π der Kreises A_0 auf sich in der gekürzten Darstellung

$$\pi = \prod_{i=1}^l \alpha_i = \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_i]$$

der Länge $l \in \mathbb{N}$ mit $A_0 = A_l$, $X_i \neq X_{i+1}$, der Fixpunktmenge

$$M = \{ a_k^0 = (a_k^0)\pi = a_k^1 / a_k^0 \cap A_0, k = 1, \dots, 5 \}$$

und der Konfiguration $M_0 := M(\pi, M)$;

Dann folgt mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von (3.6):

- (i) In M_0 ist weder ein Trägerkreis A_1 hyperfrei, denn er inzidiert mindestens mit den fünf Bildpunkten a_k^1 , noch ein Zentrum z^1 , und es gilt $\mu^0(z^1) \geq 7$.

Projektionskreise von Fixbildpunkten $a_k^{i-1} = a_k^i \neq z^i$ der Perspektivität α_i können in M_0 frei sein und in M_1 fehlen, so daß $\mu^1(z^1) \geq 6$ folgt. Die Trägerkreise und die Zentren von M_0 sind auch in M_1 nicht hyperfrei.

- (ii) Wir zeigen jetzt, daß in M_2 kein Trägerkreis hyperfrei ist:

Die Existenz in M_1 freier Bildpunkte a_k^i auf A_i mit $B_k^i = B_k^{i+1}$ widerspricht hier $X_i \neq X_{i+1}$, denn $B_k^i = B_k^{i+1}$ impliziert entweder $a_k^i = z^{i+1}$, was in M_1 nicht hyperfrei wäre, oder daß die Zentren z^i und z^{i+1} zusammenfallen, so daß

$$X_i = (z^i, B_k^i) = (z^{i+1}, B_k^{i+1}) = X_{i+1}.$$

Nach (6) aus dem Beweis zu (3.6) sind daher auch die in M_1 verbliebenen Projektionskreise in M_2 nicht hyperfrei, nachdem für die Zentren insbesondere $\mu^1(z^i) = \mu^2(z^i)$ gilt.

- (a) Enthält M_1 nur die zwei Trägerkreise A_i und

$A_{i-1} = A_{i+1}$, so existiert auf A_i höchstens ein in M_1

freier Fixbildpunkt $a_{\chi}^{i-1} = a_{\chi}^i = a_{\chi}^{i+1}$; Es bleiben auf A_i mindestens vier in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte übrig, so daß A_i in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei ist.

(b) Enthält $\mathbb{M}_1$ mehr als zwei Trägerkreise, so existieren auf A_i höchstens zwei in $\mathbb{M}_1$ freie Fixbildpunkte

$$a_{\chi}^{i-v-1} \neq a_{\chi}^{i-v} = \dots = a_{\chi}^i \neq a_{\lambda}^i = \dots = a_{\lambda}^{i+\tau} \neq a_{\lambda}^{i+\tau+1}$$

mit $v, \tau \in \mathbb{N}$, $2 \leq v + \tau \leq l - 2$, wobei die oberen Indices modulo 1 zu nehmen sind. Nach Lemma (3.5) impliziert die Freiheit von a_{χ}^i und a_{λ}^i in $\mathbb{M}_1$ jedoch $B_{\chi}^{i+1} = A_{i-1}$ und $B_{\lambda}^i = A_{i+1}$, so daß $X_i = (z^i, A_{i+1})$ und $X_{i+1} = (z^{i+1}, A_{i-1})$ folgt, und damit

$$z^i = z^{i+1} \text{ I } A_{i-1}, A_i, A_{i+1}$$

$$\text{ sowie } a_{\chi}^{i+1} = a_{\lambda}^{i-1}.$$

Es bleiben auf A_i mindestens drei in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfreie Bildpunkte a_{ξ}^i , a_{η}^i und a_{ζ}^i sowie das Zentrum z^i übrig;

Sind diese Bildpunkte von z^i verschieden, so ist A_i in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei.

Falls aber genau einer von diesen Bildpunkten mit z^i zusammenfällt, etwa $a_{\xi}^i = z^i$, schließen wir zunächst aus der Freiheit der Punkte a_{χ}^i und a_{λ}^i , daß entweder $B_{\chi}^{i-1} = A_i$ bzw. $B_{\lambda}^{i+2} = A_i$ gilt oder aber $A_{i-2} = A_i = A_{i+2}$ und $v, \tau \geq 2$. Für $B_{\chi}^{i-1} = A_i$ bzw. $B_{\lambda}^{i+2} = A_i$ gilt jedoch $X_{i-1} = (z^i, A_i)$ bzw. $X_{i+2} = (z^i, A_i)$, so daß A_i wegen $| (z^i, A_i) | \geq 2$ in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei ist.

Für $A_{i-2} = A_i = A_{i+2}$ sind unter den obigen Bedingungen von den Bildpunkten $(a_{\chi}^i \neq) a_{\chi}^{i+2}$, $(a_{\lambda}^i \neq) a_{\lambda}^{i-2}$, a_{ξ}^i , a_{η}^{i-2} , a_{η}^i , a_{η}^{i+2} , a_{ζ}^{i-2} , a_{ζ}^i und a_{ζ}^{i+2} in jedem Fall mindestens vier verschiedene in $\mathbb{M}_1$ nicht hyperfrei, so daß A_i in $\mathbb{M}_2$ nicht hyperfrei ist.

(iii) In M_2 sind weder Kreise noch Punkte hyperfrei, M_2 ist nicht leer, denn in M_2 sind noch alle Trägerkreise von M_0 enthalten, und daher eine geschlossene Teilstruktur von B im Widerspruch zu (2.5) und (2.6).

(3.8) Korollar: In einer freien Benz-Ebene gilt:

$$\Pi = \langle \Pi_e, \Pi_a \rangle \quad \text{mit} \quad \Pi_e \cap \Pi_a = \{\text{id}\}.$$

Beweis: Keine affine Projektivität π_a mit einer gekürzten Darstellung positiver Länge von einem Kreis A auf einen Kreis B läßt sich als Produkt π von eigentlichen oder freien Perspektivitäten darstellen, denn andernfalls wäre $\pi_a \pi^{-1}$ eine gekürzte Darstellung der Identität auf A mit positiver Länge im Widerspruch zu (3.7).

(3.9) Satz: In einer freien Benz-Ebene B ist die Gruppe Π der Projektivitäten eines Kreises auf sich eine freie Gruppe vom Rang $\aleph_0$.

Beweis: Wir definieren für Kreise A und Kreisbüschel X aus B mit $A \notin X$ die Menge S der Symbole (A, X) , setzen

$$S^{-1} := \{ (A, X)^{-1} := (X, A) \mid A \notin X \},$$

und betrachten die von S erzeugte freie Gruppe F, vgl. [10], Seite 91 ff., sowie [2] und [18]:

Wörter sind entweder die leere Menge, die wir mit 1 bezeichnen, oder Produkte von Symbolen aus $S \cup S^{-1}$ in beliebiger Reihenfolge.

Ein Wort w ist reduziert, wenn $w = 1$ gilt oder w kein Paar

von Symbolen der Form $(A,X)(X,A)$ oder $(X,A)(A,X)$ enthält. Zwei Wörter heißen benachbart, wenn sie durch Weglassen oder Hinzufügen von Symbolpaaren der Form $(A,X)(X,A)$ bzw. $(X,A)(A,X)$ auseinander hervorgehen.

Die Äquivalenzklassen zueinander benachbarter Wörter enthalten je genau ein reduziertes Wort. [10], Lemma 7.1.1

Die freie von S erzeugte Gruppe F ist die Menge der Äquivalenzklassen benachbarter Wörter mit dem kanonischen Produkt und der Äquivalenzklasse von 1 als Einselement.

Wir definieren jetzt die Untergruppe ϕ von F als die Menge der Äquivalenzklassen benachbarter Wörter zu

$(A_0, X_1)(X_1, A_1)(A_1, X_2)(X_2, A_2) \dots (A_{l-1}, X_l)(X_l, A_0)$,
wobei wir noch verlangen, daß $X_i \neq X_{i+1}$ gilt und außerdem die folgenden Inzidenzen, mit $i = 1, \dots, l$ und $A_l := A_0$:
falls X_i Berührbüschel mit Zentrum z ist: $z \in A_{i-1}, A_i$;
falls X_i Schnittbüschel mit den Zentren z_1 und z_2 ist:

entweder $A_{i-1} \in z_1 \notin A_i$ und $A_{i-1} \notin z_2 \in A_i$,

oder $A_{i-1} \in z_1 \in A_i$ und $A_{i-1} \notin z_2 \notin A_i$.

ϕ ist als Untergruppe der freien Gruppe F frei ([10], Theorem 7.2.1) und besitzt den Rang $\aleph_0$, da B abzählbar ist.

Um schließlich noch einzusehen, daß ϕ und Π isomorph sind, betrachten wir die Abbildung

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} \phi \longrightarrow \Pi \\ \prod_{i=1}^l (A_{i-1}, X_i)(X_i, A_i) \longmapsto \prod_{i=1}^l [A_{i-1}, X_i, A_i] \end{array} \right.$$

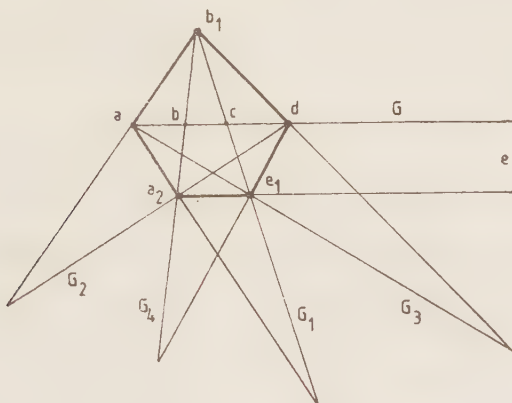
Es folgt unmittelbar, daß φ ein Epimorphismus von ϕ auf Π ist; Die Injektivität von φ folgt aus (3.7): seien w_1 und w_2 aus ϕ :

$$\varphi(w_1) = \varphi(w_2) \iff \varphi(w_1 w_2^{-1}) = \text{id} \implies w_1 w_2^{-1} = 1.$$

(3.10) Satz: In einer freien Benz-Ebene $\mathbb{B}$ gilt:

- (1) Die Stabilisatoren Γ^5 , Γ_e^5 und Γ_f^5 von Π , Π_e bzw. Π_f auf fünf Punkten eines Kreises sind freie Gruppen vom Rang $\aleph_0$.
- (2) Der Stabilisator Γ_a^3 von Π_a auf drei Punkten eines Kreises ist eine freie Gruppe vom Rang $\aleph_0$, ferner gilt $\Gamma_a^4 \neq \{\text{id}\}$ für gewisse vier Punkte eines Kreises.

Beweis: (1) Wir übernehmen die Deutung eines allgemeinen Fünfecks $a_2ab_1de_1$ als Projektivität der Länge 5 aus [18], Seite 302 (Fig. 2), wählen $\omega := e$ (so daß in $\mathbb{B}_\infty$ die Seite $\overline{e_1a_2}$ zur Diagonalen $\overline{ad}$ parallel ist) und interpretieren die Seiten und Diagonalen des Fünfecks als Kreise, die durch die beiden Eckpunkte und den Punkt e jeweils eindeutig bestimmt sind:



Dabei sind a, b, c, d und e fünf beliebige Punkte auf dem Kreis G . Der Punkt b_1 kann außerhalb von G beliebig gewählt werden, für $J \neq \emptyset$ sei b_1 jedoch nicht zu b oder c parallel.

Legt man noch den Punkt a_2 auf $G_4 := (b, b_1, e)$ fest, so sind die übrigen Punkte und Kreise bzw. Parallelklassen der Figur bestimmt, wobei wir für $J \neq \emptyset$ noch $a_2 \not\parallel b, d$ und $e_1 \not\parallel a, c$ verlangen. Die durch das Produkt

$$\pi = [G, (a_2, e), G_1] [G_1, (a, e), G_2] [G_2, (b_1, e), G_3] \\ [G_3, (d, e), G_4] [G_4, (e_1, e), G]$$

gekürzt dargestellte freie Projektivität hat die fünf Fixpunkte a, b, c, d und e (vgl. Bemerkung (1.8)).

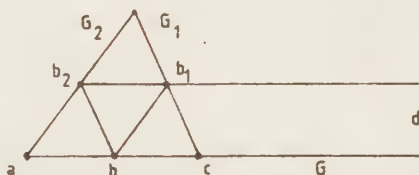
Der Rang des Stabilisators Γ_f^5 auf diesen fünf Punkten ergibt sich wie in [18] zu ∞_0 , da in den Worten von Γ_f^5 (bis auf endlich viele Ausnahmen) das Symbol $((b_1, e), G_3)$ beliebig wählbar ist.

- (2) Wir übernehmen aus [20] die Konstruktion zu Satz 6.14 und interpretieren sie in $\mathbb{B}_d$:

$$G_2 = (a, b_2, d)$$

$$b_1 = (d, G; b_2) \cap (d, G_2; b)$$

$$c = G \cap (d, (b, b_2, d); b_1)$$



Dabei sind a, b und d drei beliebige Punkte auf dem Kreis G . Der Punkt b_2 kann außerhalb von G beliebig gewählt werden, es gelte jedoch $b_2 \not\parallel a, b, d$, falls $J \neq \emptyset$. Damit sind die übrigen Punkte und Kreise der Figur bestimmt. Die mit Hilfe des Produktes

$$\pi = [G, (d, G_2), G_1] [G_1, (d, G), G_2] [G_2, (d, G_1), G]$$

definierte affine Projektivität $\pi^2 := \pi \pi$ ist gekürzt dargestellt und hat die Fixpunkte a, b, c und d (vgl. (1.8)).

Der Rang des Stabilisators Γ_a^3 auf den drei Punkten a, b und d

ergibt sich analog wie in (1) zu κ_0 , da der Punkt b_2 und damit das Symbol $(G, (d, G_2))$ bis auf endlich viele Ausnahmen beliebig wählbar ist.

- (3.11) Bemerkung: Man sagt, eine Gruppe Π von Projektivitäten einer affinen, projektiven oder einer Benz-Ebene operiert m-regulär auf einer Geraden bzw. auf einem Kreis, wenn gilt: Jede Projektivität aus Π mit m Fixpunkten ist die Identität. (Vgl. [9] und [17], wo diese Regularitätsbedingung mit (P_m) bezeichnet wird.)
- In freien Benz-Ebenen gilt also für die Projektivitäten-
gruppen Π , Π_e und Π_f die Bedingung (P_6) und für Π_a die Bedingung (P_5) .

§ 4 Die Regularitätsbedingung (P_5) in Benz-Ebenen

(4.1) Bemerkung: Sei $\mathbb{B}$ eine Benz-Ebene.

Beim Übergang von $\mathbb{B}$ zum projektiven Abschluß $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ einer affinen Ableitung von $\mathbb{B}$ im Punkt ω überträgt sich eine Regularitätsbedingung (P_m) genau auf diejenigen stereographischen Projektionen bzw. diejenigen zentralen Perspektivitäten von $\overline{\mathbb{B}}_\omega$, deren Urbild- und Bildgeraden die Punkte u_j , $j \in J$, nicht enthalten bzw. im Fall $J = \emptyset$ von der uneigentlichen Geraden U verschieden sind und deren Zentren nicht u_j sind, je nach dem, ob man (P_m) für Π , Π_e oder Π_f fordert. Diese eingeschränkte Regularitätsbedingung in $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ bezeichnen wir mit (P_m^*).

(4.2) Satz: Der projektive Abschluß einer beliebigen affinen Ableitung $\mathbb{B}_\omega$ einer Benz-Ebene $\mathbb{B}$ ist bereits dann pappossch, wenn die Gruppe der freien Projektivitäten fünf-regulär operiert.

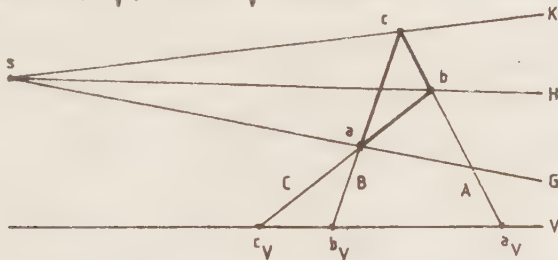
Beweis: (1) Aus (P_5^*) für Π_f leiten wir zunächst den großen Satz von Desargues her. Dabei stützen wir uns im Wesentlichen auf Beweisideen von R.Fritsch zum Satz von v.Staudt-Schleiermacher [9] und wenden dann Ergebnisse von H.-J.Kroll zur Gruppe der Parallelprojektivitäten in affinen Ebenen mit zwei ausgezeichneten Parallelbüscheln an [14]. Wir können uns für $\mathbb{B}$ auf Minkowski-Ebenen (d.h. $|J| = 2$) beschränken, die beiden Fälle $|J| \leq 1$ ergeben sich daraus zwanglos, ferner dürfen wir $\text{Ordn. } \overline{\mathbb{B}}_\omega > 8$ annehmen, denn

jede projektive Ebene kleinerer Ordnung ist, sofern sie existiert, bereits desarguessch, vgl. [16], Seite 302.

- (2) In $\overline{\mathbb{B}}_{\infty}$ seien vier Geraden G, H, K und V gegeben mit einem gemeinsamen Schnittpunkt s von G, H und K , der nicht auf V liege, sowie ein nicht triviales Dreieck mit den von s verschiedenen Eckpunkten $a \in G \setminus V$, $b \in H \setminus V$, $c \in K \setminus V$: Setze

$$A := \overline{bc} \text{ sowie } a_V := A \cap V,$$

analog seien B, b_V, C und c_V definiert.



Für jede derartige Konfiguration von $\overline{\mathbb{B}}_{\infty}$ fordert der große Satz von Desargues, daß

$$\pi = [G, c_V, H] [H, a_V, K] [K, b_V, G]$$

die Identität ist. π besitzt stets die drei Fixpunkte s, a und $G \cap V$, zwei weitere Fixpunkte ermitteln wir mit Hilfe von (P_5^{π}) :

- (i) Wir setzen zunächst voraus:

$$u_j \notin G, H, K, A, B, C, V, \quad j \in J$$

$$s, a, a_V, b_V, c_V \notin U$$

Auf K existieren wegen $\text{Ord. } \overline{\mathbb{B}}_{\infty} > 8$ noch mindestens vier von $s, c, K \cap V, K \cap U$, $(a)[G, a_V, K]$ und $(a)[G, c_V, K]$ verschiedene Punkte c' .

- (ii) Außerdem nehmen wir noch an:

$$a_V \neq G \cap V \quad \text{und} \quad c_V \neq K \cap V.$$

Dann ist

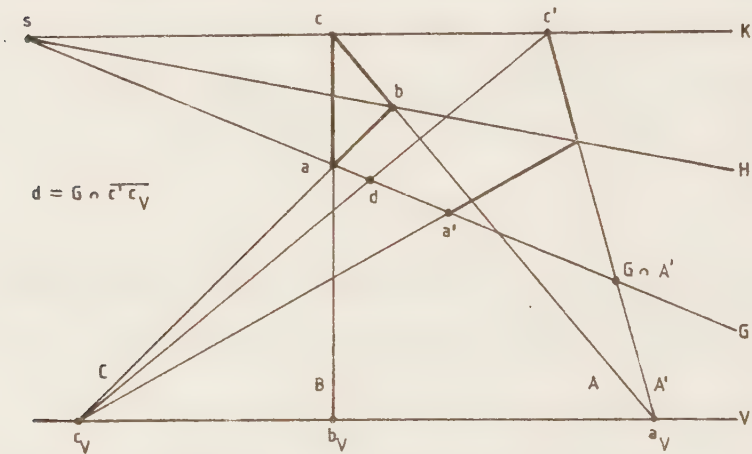
$$a' := (c')[K, a_V, H] [H, c_V, G]$$

ein weiterer Fixpunkt von π .

Zum Beweis setzen wir $A' := \overline{c' a_V}$ und betrachten die Projektivität

$$\psi := [G, c_V, A'] [A', s, C] [C, a_V, K] [K, a, V] [V, c', G],$$

wobei wir im Fall $u_j \in A'$ einen anderen Punkt c' mit den obigen Eigenschaften wählen.



ψ besitzt die fünf Fixpunkte $a, s, G \cap V, G \cap A'$ und $G \cap \overline{c' c_V}$. Mit (P_5^x) ist ψ die Identität: Aus $a' = (a')\psi$ folgt die Kollinearität von a', b_V und c' und damit schließlich $a' = (a')\pi$. Vgl. [9], Seite 179.

- (iii) Es sei hier bemerkt, daß die Voraussetzung $u_j \notin A, B$ aus (i) für (ii) nicht notwendig ist: Die Geraden A und B sind lediglich Projektionsgeraden von ψ und dürfen u_j enthalten, $j \in J$. Wir werden später bei Hilfskonstruktionen davon Gebrauch machen, sonst behalten wir (i) wie oben bei.

(iv) Wir können jetzt die Voraussetzungen

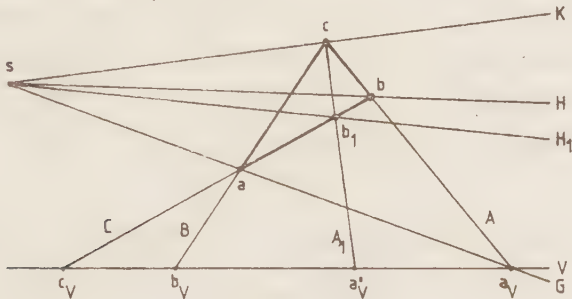
$$a_V \neq G \cap V \quad \text{und} \quad c_V \neq K \cap V$$

aus (ii) fallenlassen:

Im Fall $a_V = G \cap V$ und $c_V \neq K \cap V$ wählen wir auf G einen von a , b , c_V , $C \cap U$ und $C \cap K$ verschiedenen Punkt b_1 derart, daß

$$u_j \notin A_1 := \overline{b_1 c} \quad \text{und} \quad u_j \notin H_1 := \overline{b_1 s}$$

und setzen $a'_V := A_1 \cap V$.



Dann sind die Projektivitäten

$$\pi_1 := [H_1, c_V, H] [H, a_V, K] [K, a'_V, H_1] \quad \text{und}$$

$$\pi_2 := [H_1, a'_V, K] [K, b_V, G] [G, c_V, H_1]$$

nach (ii) gleich der Identität auf H_1 , also auch

$$\pi_1 \pi_2 = [H_1, c_V, H] [H, a_V, K] [K, b_V, G] [G, c_V, H_1] = \text{id}.$$

Daraus ergibt sich schließlich $\pi = \text{id}$.

Im Fall $a_V \neq G \cap V$ und $c_V = K \cap V$ wählen wir analog auf A einen von b , c , a_V , $A \cap U$ und $A \cap G$ verschiedenen Punkt c_1 derart, daß

$$u_j \notin B_1 := \overline{c_1 a} \quad \text{und} \quad u_j \notin K_1 := \overline{c_1 s}$$

und setzen $b'_V := B_1 \cap V$

Dann sind die folgenden Projektivitäten nach (ii) gleich der Identität auf G :

dem Dreieck $\Delta a|s_1c|$ und der Achse B die Voraussetzungen von (i) und (iii), es folgt die Kollinearität von c' , a' und b_V aus

$$[A', c, H][H, a, \overline{b'c_V}][\overline{b'c_V}, b_V, A'] = \text{id}.$$

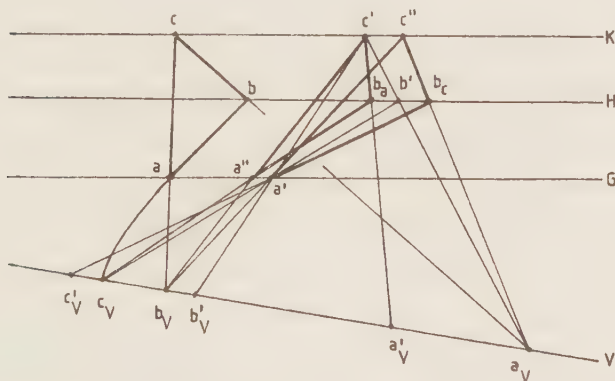
Mit dem bisher zu (v) Bewiesenen erledigen wir schließlich die oben ausgeschlossenen Fälle, indem wir für $u_j \in A'$ oder für $u_j \in \overline{a'c_V}$ die Annahme

$$\overline{a'c'} \cap V =: b_V' \neq b_V$$

zum Widerspruch führen:

Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} a'' &:= \overline{c'b_V} \cap G, & b_a &:= \overline{a''c_V} \cap H, & a_V' &:= \overline{c'b_a} \cap V \quad \text{und} \\ c'' &:= \overline{a'b_V} \cap K, & b_c &:= \overline{c''a_V} \cap H, & c_V' &:= \overline{a'b_c} \cap V. \end{aligned}$$



Dann gilt insbesondere $a_V \neq a_V'$ und $c_V \neq c_V'$, die Seiten von mindestens einem der beiden Dreiecke $\Delta a''b_a c'$ und $\Delta a'b_c c''$ enthalten keinen Punkt u_j für j aus J , und aus dem ersten Teil von (v) folgt der Widerspruch

$$a_V' = \overline{c'b_a} \cap V = \overline{cb} \cap V = a_V \quad \text{bzw.}$$

$$c_V' = \overline{a'b_c} \cap V = \overline{ab} \cap V = c_V.$$

(vi) In den Voraussetzungen von (i) und (v) dürfen wir speziell für $s \in U \setminus \{u_j\}$ auch $s \in V$ zulassen, denn in keiner Hilfskonstruktion aus (v) ist der Punkt s Zentrum einer Desargues-Konfiguration, auf welche (i) angewandt wird.

(vii) Schließlich können wir auch auf die Voraussetzungen

$$u_j \notin V \quad \text{und} \quad a_V, b_V, c_V \notin U$$

verzichten, wenn wir statt dessen

$$a_V, b_V, c_V \neq u_j$$

verlangen:

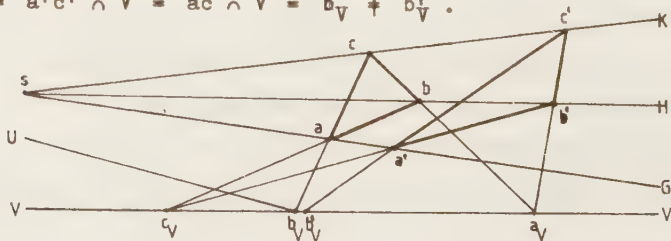
Dann ist entweder höchstens einer der Punkte a_V, b_V und c_V uneigentlich und $U \neq V$, oder es gilt

$$a_V, b_V, c_V \in U \setminus \{u_j\} \quad \text{und} \quad U = V.$$

Im ersten Fall können wir die Bezeichnungen zunächst so wählen, daß $b_V \in U \setminus \{u_j\}$ und $a_V, c_V \notin U$. Dann folgt für jedes auf G, H und K liegende Dreieck $\triangle a'b'c'$ mit $a_V = \overline{b'c'} \cap V$ und $c_V = \overline{a'b'} \cap V$ sofort $\overline{a'c'} \cap V = b_V$, denn andernfalls erfüllt das Dreieck $\triangle a'b'c'$ mit den Bezugspunkten $b_V^i := \overline{a'c'} \cap V$ sowie a_V und c_V auf der Achse V die Voraussetzungen von (i) mit (iii) und (v) mit (vi)

(eventuell nach einer geeigneten Änderung der Bezeichnung der Eckpunkte des Dreiecks $\triangle a'b'c'$ derart, daß keiner der Punkte u_j auf $\overline{a'b'}$ liegt), und es folgte (in der ursprünglich gewählten Bezeichnung) der Widerspruch:

$$b_V^i = \overline{a'c'} \cap V = \overline{ac} \cap V = b_V \neq b_V^i.$$



Den zweiten Fall führen wir auf den ersten zurück:

Nehmen wir $V = U$,

$$a_V, b_V, c_V \in U \setminus \{u_j\}$$

und o.E.

$$a'_V := \overline{b'c'} \cap \overline{bc} \neq a_V$$

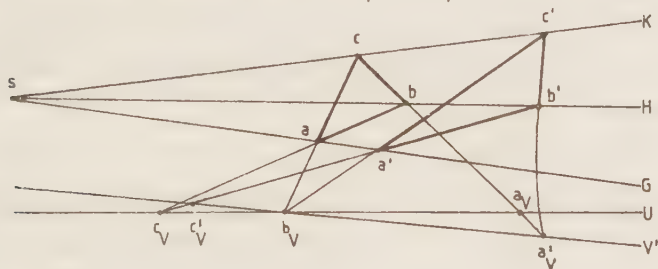
für ein auf G, H und K liegendes Dreieck $\triangle a'b'c' \nparallel \triangle abc$ mit $b_V = \overline{a'c'} \cap U$ und $c_V = \overline{a'b'} \cap U$ an:

Dann erfüllt jedoch das Dreieck $\triangle a'b'c'$ mit den Bezugspunkten

$$a'_V \notin U, \quad b_V \in U, \quad c'_V := \overline{a'b'} \cap \overline{a_V b_V} \notin U$$

auf der Achse $V' := \overline{a'_V b_V}$ die Voraussetzungen des ersten Falls, und es folgt der Widerspruch

$$c_V = \overline{a'b'} \cap U = \overline{a'b'} \cap \overline{ab} = c'_V \neq c_V.$$



- (3) Wir haben in (2), Abschnitt (i), (v) und (vii) bewiesen, daß sich in $\overline{\mathbb{B}}_\infty$ alle Desargues-Konfigurationen mit beliebigem Zentrum $s \nparallel u_j$ und $U \setminus \{u_j\}$ als Achse schließen, wenn die Trägergeraden und die Dreiecksseiten keinen der Punkte u_j enthalten.

Daher operiert die Untergruppe von der Gruppe der Parallelprojektivitten von $\mathbb{B}_\infty$, die von den Parallelperspektivitten

$\pi : G \longrightarrow H$ mit $u_j \notin G, H$ und $u_j \notin \overline{a(a)\pi}$ mit $a \in G \setminus H$ erzeugt wird, auf jeder Geraden G mit $u_j \notin G$ scharf zweifach transitiv, so daß $\mathbb{B}_\infty$ nach H.-J.Kroll [14], (1.2) desarguessch ist und damit auch $\overline{\mathbb{B}}_\infty$; vgl. [16], Seite 83 Nr. 27.

Wir bemerken noch, daß sich in $\overline{\mathbb{B}}_\infty$ jetzt jede zentrale Perspektivität als Produkt zweier zentraler Perspektivitäten mit eigentlichen Zentren darstellen läßt, d.h. in $\mathbb{B}$ gilt $\Pi_a \leq \Pi_f$.

- (4) Nach dem Satz von Wedderburn (vgl. [16], Seite 302) ist jede endliche projektive desarguessche Ebene bereits papposch. Wir müssen nur noch zeigen, daß aus dem Satz von Desargues und $(P_5^{\mathbb{K}})$ für Π_f in projektiven Ebenen $\overline{\mathbb{B}}_\infty$ unendlicher Ordnung der Satz von Pappos folgt; vgl. [16], S. 135. Um dies einzusehen, übernehmen wir den Beweis von A.Schleiermacher [17], Seite 303:

In der desarguesschen projektiven Ebene $\overline{\mathbb{B}}_\infty$ unendlicher Ordnung führen wir ein Koordinatensystem mit den Grundpunkten o, u, v und e mit $u, v \in U \setminus \{u_j\}$ und $u_j \notin \overline{oe}$ ein. Dann ist der entsprechende Ternärkörper ein Schiefkörper F , dessen Elemente mit den Punkten von $\overline{ov} \setminus \{v\}$ identifiziert werden können; vgl. [16], Seite 31.

Für jedes Element k aus F mit $k \neq 0, k^2$ sowie

$$u_j \neq (k^{-1}) =: k_1 \quad \text{und} \quad (k, 0) =: k_2$$

besitzt die Projektivität

$$\pi = [\overline{ov}, u, \overline{oe}] [\overline{oe}, v, \overline{ok_1}] [\overline{ok_1}, u, \overline{ve}] [\overline{ve}, o, \overline{vk_2}] [\overline{vk_2}, u, \overline{ov}]$$

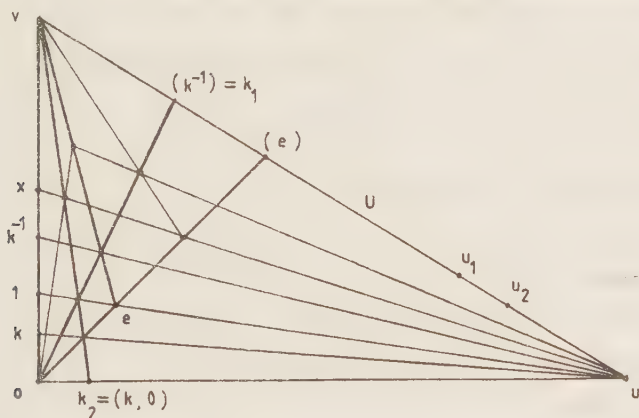
die fünf Fixpunkte $0, 1, k, k^{-1}$ und v , ferner bildet π

jeden Punkt x von $\overline{ov}$ auf den Punkt $k^{-1}xk$ ab.

Mit (P_5^{π}) ist π die Identität, so daß jedes Element k aus F mit

$$k \neq 0, k^2 \text{ und } k \neq k_j \text{ mit } (k_j^{-1}) := u_j$$

im Zentrum des (unendlichen) Schiefkörpers F liegt. Daher ist F kommutativ, so daß in $\overline{B}_{\infty}$ der Satz von Pappos folgt.



(4.3) Korollar: Eine endliche Laguerre- oder Minkowski-Ebene ungerader Ordnung ist miquelsch, wenn die Gruppe der freien Projektivitäten fünf-regulär operiert. (Satz von v. Staudt-Schleiermacher für endliche Laguerre- oder Minkowski-Ebenen ungerader Ordnung)

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus (4.2), dem Satz von Segre [21] und [11], Seite 49, Fußnote, bzw. [6].

§ 5 Die Regularitätsbedingung (P_4) in Benz-Ebenen

(5.1) Bemerkung: Wir verwenden das im Satz (4.2) formulierte Teilresultat für (P_5) zum Beweis, daß in einer Benz-Ebene $\mathbb{B}$ der Satz von Miquel (vgl. etwa [3], Seite 131, Satz 3.4) wenigstens schon aus (P_4) für Π_e folgt.

Im Weiteren setzen wir voraus, daß die Gruppe Π_e von $\mathbb{B}$ vierregulär operiert: Damit ist zunächst jede affine Ableitung $\mathbb{B}_\omega$ bzw. deren projektiver Abschluß $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ pappossch. Wir koordinatisieren $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ über einem kommutativen Körper, den wir ebenfalls mit $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ bezeichnen.

Entsprechend Bemerkung (4.1) gilt (P_4^π) genau für diejenigen stereographischen Projektionen und diejenigen zentralen Perspektivitäten von $\overline{\mathbb{B}}_\omega$, deren Urbild- und Bildgeraden die Punkte u_j , $j \in J$, nicht enthalten bzw. im Fall $J = \emptyset$ von der uneigentlichen Geraden U verschieden sind und deren Zentren von u_j verschieden sind.

(5.2) Definitionen und Folgerungen:

- (1) Ein Produkt ι zentraler Perspektivitäten von $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ von einer Geraden A auf sich mit $\iota^2 = \text{id} \neq \text{id}$ nennen wir projektive Involution von $\overline{\mathbb{B}}_\omega$; Sie ist in (der papposschen projektiven Ebene) $\overline{\mathbb{B}}_\omega$ insbesondere durch die Angabe zweier disjunkter Punkt-Bildpunkt-Paare (a, b) und (c, d) von A eindeutig definiert, wobei Punkt und Bildpunkt eines Paares auch zu einem Fixpunkt von ι zusammenfallen können: projektive Involutionen mit zwei Fixpunkten existieren nur für $\text{char } \overline{\mathbb{B}}_\omega \neq 2$ und sind in diesem Fall durch die beiden

Fixpunkte eindeutig bestimmt, vgl. [16], Seite 141, Nr. 7, und sobald nur höchstens ein Fixpunkt zur Definition einer projektiven Involution herangezogen wird, folgt die Eindeutigkeit aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, vgl. etwa [16], Seite 139, Nr. 4.

Wir definieren für eine projektive Involution ι mit

$$a^{\iota} = b, \quad b^{\iota} = a; \quad c^{\iota} = d, \quad d^{\iota} = c$$

die folgenden Schreibweisen

$$\iota = \iota(a, b; c, d) \quad \text{oder} \quad \iota : a \longleftrightarrow b, \quad c \longleftrightarrow d,$$

wobei $a \nmid c$ gelte.

- (2) Gegenseiten bzw. Diagonalen eines nicht trivialen Vierecks von $\mathbb{B}_{\infty}$ schneiden jede Gerade A , wenn mehr als drei Schnittpunkte existieren, jeweils in den Punkt-Bildpunkt-Paaren einer projektiven Involution von A , vgl. [16], Seite 140, Nr. 5, 6.
- (3) Schließlich definieren wir in $\mathbb{B}_{\infty}$ für ein Oval K aus $\mathbb{K}'_{\infty}$ und einen Punkt z mit $z \notin K$ auf den Punkten von K folgende Involution ι_z :

für $a \in K$ mit $|\overline{az} \cap K| = 2$ vertausche ι_z die beiden Schnittpunkte von $\overline{az}$ und K ;

mit $|\overline{az} \cap K| = 1$ sei a Fixpunkt von ι_z .

Falls z ein eigentlicher Punkt (bzw. aus $U \setminus \{u_j\}$) ist, wird die Abbildung ι_z des Ovals auf sich von der Büschelinvolution des Kreises K von $\mathbb{B}$ mit den Zentren z und ∞ (bzw. von der Berührbüschelinvolution des Kreises K von $\mathbb{B}$ mit dem entsprechenden Berührbüschel und dem Zentrum ∞) induziert; vgl. [4] und [8].

Wir nennen ι_z in $\mathbb{B}_{\infty}$ stets Büschelinvolution mit dem Zentrum z .

(5.3) Lemma: Sei $\mathbb{B}$ eine Benz-Ebene mit $\text{Ord. } \mathbb{B} \geq 7$.

Dann gehen in $\mathbb{B}$ durch jeden Punkt einer Sekanten, die ein Oval K aus K' in eigentlichen Punkten schneidet, höchstens zwei Tangenten an eigentliche Punkte von K und für $\text{char } \mathbb{B} = 2$ nur höchstens eine, wenn (P_4) für Π_e gilt.

Beweis: Wir nehmen zunächst $\text{char } \mathbb{B} \neq 2$ und die Existenz von fünf eigentlichen Punkten a_1, a_2, b_1, b_2 und b_3 auf K an derart, daß für einen beliebigen Punkt z auf der Sekanten $\overline{a_1 a_2}$ die Geraden $\overline{z b_1}$, $\overline{z b_2}$ und $\overline{z b_3}$ Tangenten an K sind. Wir definieren

$$b_{ik} := \overline{b_i b_k} \cap \overline{a_1 a_2}, \quad i, k \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq k.$$

Die Verschiedenheit der sechs Punkte $z, a_1, a_2, b_{12}, b_{13}$ und b_{23} folgt unmittelbar.

Wir definieren ferner:

$$\sigma_i := [\overline{a_1 a_2}, b_i, K] \quad \text{und}$$

$$\iota_{ik} := \iota(b_{ik}, z; b_{il}, b_{kl})$$

für $i, k, l \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq k \neq l \neq i$.

Dann vertauschen sowohl $\sigma_i \sigma_k^{-1}$ als auch $\sigma_k \sigma_i^{-1}$ als Projektivitäten von $\overline{a_1 a_2}$ auf sich die Punkte z und b_{ik} , beide Projektivitäten lassen a_1 und a_2 fest und bilden mit $(P_4^{\mathbb{B}})$ jeden Punkt gleich ab.

Andererseits vertauscht $\sigma_i \sigma_k^{-1} = \sigma_k \sigma_i^{-1}$ auch die Punkte b_{il} und b_{kl} , denn es gilt:

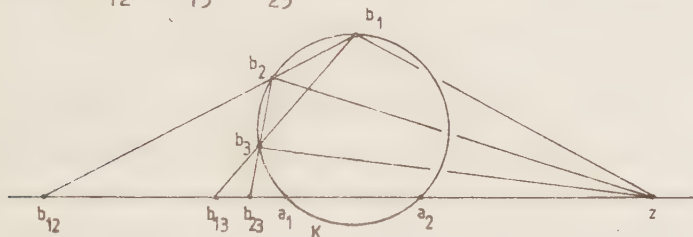
$$\sigma_i \sigma_l^{-1} \sigma_l \sigma_k^{-1} = \sigma_i \sigma_k^{-1} = \sigma_k \sigma_i^{-1} = \sigma_k \sigma_l^{-1} \sigma_l \sigma_i^{-1}.$$

Damit folgt aus $(P_4^{\mathbb{B}})$

$$\iota_{ik} = \sigma_i \sigma_k^{-1},$$

die Punkte a_1 und a_2 sind Fixpunkte der projektiven Involu-

tion ι_{ik} : Nach [16], Seite 141, Nr. 7, bildet ι_{ik} den Punkt z auf den vierten harmonischen Punkt zu a_1 , a_2 und z ab. Aus der Eindeutigkeit des Doppelverhältnisses folgt der Widerspruch $b_{12} = b_{13} = b_{23}$.



Angenommen, es ist $\text{char } \mathbb{B}_\infty = 2$ und es existieren auf K vier eigentliche Punkte a_1, a_2, b_1 und b_2 derart, daß für einen beliebigen Punkt z auf der Sekanten $\overline{a_1 a_2}$ die Geraden $\overline{zb_1}$ und $\overline{zb_2}$ Tangenten an K sind.

Dann folgt zunächst analog zum ersten Teil (mit den Bezeichnungen von dort)

$$b_{12} = \overline{b_1 b_2} \cap \overline{a_1 a_2} \neq a_1, a_2, z \quad \text{ sowie } \\ \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \sigma_1^{-1}.$$

Wegen

$$\sigma_2 \sigma_1^{-1} = (\sigma_1 \sigma_2^{-1})^{-1}$$

ist die Projektivität $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ involutorisch:

Für einen von a_1, a_2, z und b_{12} verschiedenen Punkt x auf $\overline{a_1 a_2}$ und dessen Bild y unter $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ folgt mit $(P_4^{\mathbb{B}})$:

$$\sigma_1 \sigma_2^{-1} = \iota(z, b_{12}; x, y) =: \iota : z \longleftrightarrow b_{12}, x \longleftrightarrow y$$

der Widerspruch, daß die projektive Involution ι die zwei Fixpunkte a_1 und a_2 besitzt, vgl [16], Seite 141, Nr. 7.

(5.4) Satz: Sei $\mathbb{B}$ eine Benz-Ebene mit (P_4) für Π_e .

Dann ist jedes Oval K aus $\mathbb{K}'_{\omega}$ in $\mathbb{B}_{\omega}$ ein Kegelschnitt.

Beweis: (1) Zunächst setzen wir $\text{Ord.} \mathbb{B}_{\omega} \geq 16$ voraus, Benz-Ebenen kleinerer Ordnung werden wir am Schluß des Beweises betrachten.

(2) Zur Vermeidung umständlicher Fallunterscheidungen wegen der Lage der Punkte u_j , $j \in J$, in Laguerre- und Minkowski-Ebenen machen wir uns die Tatsache zunutze, daß für $J \neq \emptyset$ alle Ovale aus $\mathbb{K}'_{\omega}$ in $\mathbb{B}_{\omega}$ die Punkte u_j enthalten, und schränken die Lage der Zentren z der jeweils betrachteten Büschelinvolution ι_z ein: Dazu definieren wir die Punktmenge $\mathbb{D}$ durch

$$\mathbb{D} := U \setminus \{u_j\}, \text{ falls } |J| = 2;$$

$$\mathbb{D} := D \setminus \{u_j\}, \text{ falls } |J| = 1, \text{ für eine fest gewählte Gerade } D \text{ mit } u_j \in D \neq U.$$

(3) Lemma: Je zwei Diagonalepunkte zweier nicht trivialer und völlig disjunkter Vierecke von $\mathbb{B}_{\omega}$ seien identisch. Liegen sieben Eckpunkte der beiden Vierecke auf einem Oval K aus $\mathbb{K}'_{\omega}$, wobei im Fall $J \neq \emptyset$ genau eine Seite des vollständig in K einbeschriebenen Vierecks die Menge $\mathbb{D}$ enthalte, dann ist auch die achte Ecke ein Punkt auf K .

Beweis: Wir wählen mit $i, k \in \{1, 2\}$, $i \neq k$, die Bezeichnungen p_i , q_i , r_i und s_i für die je vier Eckpunkte der beiden Vierecke derart, daß die von r_2 verschiedenen Eckpunkte auf K liegen,

$$d_1 := \overline{p_1 q_1} \cap \overline{r_1 s_1} = \overline{p_k s_k} \cap \overline{q_k r_k}$$

die beiden Diagonalepunkte sind, und daß gegebenenfalls

$D \subseteq \overline{r_1 s_1}$ gilt, d.h. $\{u_j\} \subseteq \{r_1, s_1\}$.

Dann folgt zunächst für

$$v_i := \overline{p_k s_i} \cap \overline{p_i q_k} \quad \text{und} \quad w_i := \overline{p_k r_i} \cap \overline{q_i q_k}$$

insbesondere

$$v_i, w_i \notin \overline{p_i q_i}, \overline{r_i s_i}.$$

Ferner liegen die nicht trivialen Dreiecke

$$\triangle p_i s_i v_i \quad \text{und} \quad \triangle q_i r_i w_i$$

axialperspektivisch (mit der Achse $\overline{d_k p_k q_k}$) und damit nach

dem (dualen) Satz von Desargues auch zentralperspektivisch:

Zentrum ist der Punkt $d_i = \overline{p_i q_i} \cap \overline{r_i s_i}$, also sind auch die Punkte d_i , v_i und w_i kollinear; vgl. etwa [16], Seite 66 ff, Nr. 6, 20 und 27.

Die Vierecke $\square p_k v_i q_k w_i$ sind ebenfalls nicht trivial, und ihre gegenüberliegenden Seiten ($\overline{p_k v_i}$ und $\overline{q_k w_i}$ sowie $\overline{v_i q_k}$ und $\overline{w_i p_k}$) schneiden die Geraden $\overline{p_i q_i}$ und $\overline{r_i s_i}$ in den Punkt-Bildpunkt-Paaren einer projektiven Involution ι_i^I auf $\overline{p_i q_i}$ bzw. ι_i^{II} auf $\overline{r_i s_i}$. Nach (5.2)(2) sind dann auch die Schnittpunkte der Diagonalen ($\overline{p_k q_k}$ und $\overline{v_i w_i}$) mit den Geraden $\overline{p_i q_i}$ bzw. $\overline{r_i s_i}$ Punkt-Bildpunkt-Paare der Involutionen ι_i^I bzw. ι_i^{II} . Wir definieren die stereographischen Projektionen

$$\sigma_i^I := [\overline{p_i q_i}, p_k, K] \quad \text{sowie} \quad \sigma_i^{II} := [\overline{r_i s_i}, q_k, K]$$

und die (involutorischen) Projektivitäten

$$\pi_i^I := (\sigma_i^I)^{-1} \iota_i^I \sigma_i^I \quad \text{sowie} \quad \pi_i^{II} := (\sigma_i^{II})^{-1} \iota_i^{II} \sigma_i^{II}$$

von K auf sich, die die folgenden Punkte von K vertauschen:

$$\pi_1^I : p_1 \longleftrightarrow r_1, q_1 \longleftrightarrow s_1, q_2 \longleftrightarrow s_2;$$

$$\pi_2^I : q_1 \longleftrightarrow s_1, q_2 \longleftrightarrow s_2, p_2 \longleftrightarrow (p_2)\pi_2^I \in \overline{r_2 p_1} \cap K;$$

$$\pi_2^{II} : p_1 \longleftrightarrow r_1, q_2 \longleftrightarrow s_2, p_2 \longleftrightarrow (p_2)\pi_2^{II} \in \overline{r_2 q_1} \cap K.$$

Mit $(P_4^\#)$ folgt $\pi_1^I = \pi_2^I = \pi_2^{II}$, so daß die Bilder des Punk-

die Punkte

$$a_{ik} := \overline{a_i a_k} \cap \overline{a'_i a'_k} \quad \text{und} \quad a'_{ik} := \overline{a_i a'_k} \cap \overline{a'_i a_k}$$

mit $i \neq k$, wobei i und k aus einer die Sekanten durchnummerierenden Indexmenge N zu nehmen sind.

Es folgt unmittelbar

$$a_{ik} \neq a_{kl}, \quad a_{ik} \neq a'_{kl}, \quad a'_{ik} \neq a_{kl}, \quad a'_{ik} \neq a'_{kl}$$

für $i, k, l \in N$ mit $i \neq k \neq l \neq i$.

(ii) Die hinreichend große Ordnung von $\mathbb{B}_\infty$ ermöglicht mit Hilfe von (3) und Lemma (5.3) zu jedem Oval K aus $\mathbb{K}'_\infty$ die Wahl eines Zentrums z sowie die Wahl von fünf Sekanten von K durch z mit den Schnittpunkten $a_i, a'_i \in K$, $i = 1, \dots, 5$ derart, daß gilt:

$$a_{12} = a_{34} \quad \text{und} \quad a_{23} = a_{15};$$

$$a_{12}, a'_{12} \notin U, \quad \text{falls} \quad J = \emptyset \quad \text{bzw.}$$

$$\{u_j\} \subseteq \overline{a_3 a_5}, \quad \text{falls} \quad J \neq \emptyset.$$

Um dies einzusehen, unterscheiden wir drei Fälle:

(a) Für $J = \emptyset$ und $\text{char } \mathbb{B}_\infty = 2$ wählen wir auf einer Sekante S von K einen Punkt x mit $x \notin U, K$ und ergänzen durch eine weitere Sekante S' durch x zu einem in K eingeschriebenen Viereck mit der Eckpunktmenge

$$(S \cap K) \cup (S' \cap K)$$

und x als einen Diagonalpunkt: Wegen der Kollinearität der drei Diagonalpunkte und $x \notin U$ ist mindestens ein weiterer Diagonalpunkt eigentlich, wir bezeichnen diese beiden Diagonalpunkte mit a_{12} und a'_{12} sowie den dritten Diagonalpunkt mit z .

(b) Für $J = \emptyset$ und $\text{char } \mathbb{B}_\infty \neq 2$ wählen wir auf einer Sekante S von K mit den Schnittpunkten x_1 und x_2 auf K

zwei weitere eigentliche Punkte x_3 und x_4 derart, daß das Punktequadrupel $(x_1, x_2; x_3, x_4)$ harmonisch ist. Analog wie in (a) ergänzen wir durch eine weitere Sekante S' durch x_3 zu einem in K einbeschriebenen Viereck: Dann liegt der Punkt x_4 wegen der Eindeutigkeit des Doppelverhältnisses auf der Verbindungsgeraden der von x_3 verschiedenen Diagonalepunkte und wegen $x_4 \notin U$ ist neben x_3 mindestens ein weiterer Diagonalepunkt eigentlich, wir bezeichnen diese beiden Diagonalepunkte wieder mit a_{12} und a'_{12} sowie den dritten mit z .

- (c) Für $J \neq \emptyset$ wählen wir den Punkt z als den Schnittpunkt von D mit der Verbindungsgerade zweier Punkte a_2 und a'_2 auf K mit

$$a_2, a'_2 \notin K \cap U, K \cap D.$$

In den ersten beiden Fällen können wir nach Festlegung der Sekanten $\overline{a_1 a'_1}$ und $\overline{a_2 a'_2}$ die Sekante $\overline{a_3 a'_3}$ durch z noch frei wählen; Im letzten Fall legen wir zunächst die Sekante $\overline{a_3 a'_3}$ durch die Bedingung $u_j \in \overline{a_3 a'_3}$ fest und können die Sekante $\overline{a_1 a'_1}$ durch z noch frei wählen.

Wir benötigen

$$a_{12} \notin \text{Tg}(a_3, K) \cap \text{Tg}(a'_3, K) \text{ und}$$

$$a_{23} \notin \text{Tg}(a_1, K) \cap \text{Tg}(a'_1, K),$$

was sich stets durch eine geeignete Vertauschung der Bezeichnungen erreichen läßt:

Für

$$\text{Tg}(a_3, K) \cap \text{Tg}(a'_3, K) = a_{12} \neq a'_{12}$$

vertauschen wir a_1 mit a'_1 und damit a_{12} und a'_{12} ; Und für

$$\text{Tg}(a_1, K) \cap \text{Tg}(a'_1, K) = a_{23} \neq a'_{23}$$

vertauschen wir a_3 mit a'_3 und damit a_{23} und a'_{23} .

Dann folgt:

$$a_4 := (\overline{a_{12}a_3} \cap K) \setminus \{a_3\} \neq \emptyset \quad \text{oder}$$

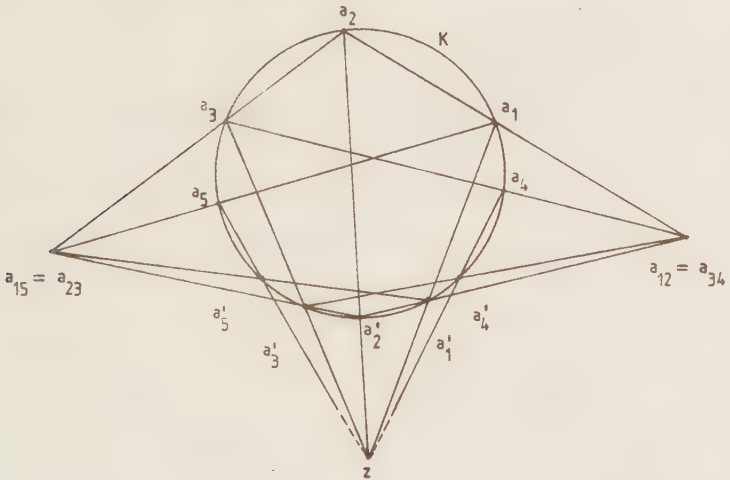
$$a'_4 := (\overline{a_{12}a'_3} \cap K) \setminus \{a'_3\} \neq \emptyset$$

sowie:

$$a_5 := (\overline{a_{23}a_1} \cap K) \setminus \{a_1\} \neq \emptyset \quad \text{oder}$$

$$a'_5 := (\overline{a_{23}a'_1} \cap K) \setminus \{a'_1\} \neq \emptyset.$$

Die noch fehlenden Punkte a'_4 bzw. a_4 und a'_5 bzw. a_5 liefert (4).



Dann sind nach dem Satz von Desargues in den folgenden, bezüglich z zentralperspektivisch gelegenen, nicht trivialen Dreiecken die Schnittpunkte entsprechender Seiten kollinear:

$$\begin{array}{lll} \triangle a_1 a_2 a_3 & : \triangle a'_1 a'_2 a'_3 & : \overline{a_{12} a_{13} a_{23}} \\ \triangle a_1 a_3 a_4 & \triangle a'_1 a'_3 a'_4 & : \overline{a_{13} a_{14} a_{34}} \\ \triangle a_1 a_3 a_5 & \triangle a'_1 a'_3 a'_5 & : \overline{a_{13} a_{15} a_{35}} \end{array}$$

Wegen $a_{12} = a_{34}$ und $a_{23} = a_{15}$ folgt

$$\overline{a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{35}} =: A ;$$

Ferner:

$$\Delta a_1 a_2 a_3^1 \quad \Delta a_1^1 a_2^1 a_3 \quad : \quad \overline{a_{12}a_{13}a_{23}^1}$$

$$\Delta a_2^1 a_3^1 a_4 \quad \Delta a_2 a_3^1 a_4^1 \quad : \quad \overline{a_{23}^1 a_{24}^1 a_{34}^1}$$

Aus $a_{12} = a_{34}$ folgt

$$\overline{a_{12}a_{13}^1a_{23}^1a_{24}^1} =: B ;$$

$$\Delta a_1 a_2^1 a_5 \quad \Delta a_1^1 a_2^1 a_5^1 \quad : \quad \overline{a_{12}^1 a_{15}^1 a_{25}^1}$$

$$\Delta a_1 a_3^1 a_5 \quad \Delta a_1^1 a_3^1 a_5^1 \quad : \quad \overline{a_{13}^1 a_{15}^1 a_{35}^1}$$

$$\Delta a_2 a_3^1 a_5^1 \quad \Delta a_2^1 a_3^1 a_5^1 \quad : \quad \overline{a_{23}^1 a_{25}^1 a_{35}^1}$$

Wegen $a_{23} = a_{15}$ folgt

$$\overline{a_{15}a_{12}^1a_{13}^1a_{25}^1a_{35}^1} =: C .$$

Wir stellen fest, daß für $J = \emptyset$ die Geraden A, B und C von U verschieden sind und für $J \neq \emptyset$ insbesondere die Punkte u_j nicht enthalten: dies ist im ersten Fall eine Folge von $a_{12} \in A, B$ bzw. $a_{12}^1 \in C$ und im zweiten Fall von $u_j \in \{a_3, a_3^1\}$:

Denn schon für $a_i \in \overline{a_{ik}a_{il}}$ wäre

$$a_k \in \overline{a_i a_{ik}} = \overline{a_{ik} a_{il}} \quad \text{und}$$

$$a_l \in \overline{a_i a_{il}} = \overline{a_{ik} a_{il}}$$

im Widerspruch zu $a_i, a_k, a_l \in K$;

Analog überzeugt man sich von

$$a_i^1 \notin \overline{a_{ik} a_{il}} \quad , \quad a_i \notin \overline{a_{ik}^1 a_{il}^1} \quad , \quad a_i^1 \notin \overline{a_{ik}^1 a_{il}^1} ;$$

(wobei $i, k, l \in N$ mit $i \neq k \neq l \neq i$).

Die aus stereographischen Projektionen zusammengesetzten Projektivitäten

$$\pi_1 := [K, a_1, A][A, a_1^1, K] \quad \text{und}$$

$$\pi_2 := [K, a_2^1, B][B, a_2, K]$$

von K auf sich bilden beide die Punkte a_1^1 auf a_1 und a_1 auf

a_i' für $i = 2, 3, 4$ ab: mit (P_4^*) folgt $\pi_1 = \pi_2$.

Wegen $a_{15} \in A$ gilt

$$a_5' = (a_5)\pi_1 = (a_5)\pi_2$$

und damit $a_{25}' \in B$.

Die Punkte a_{13}' und a_{25}' sind verschieden:

Denn andernfalls liegen die Dreiecke

$$\triangle a_1 a_2 a_3 \quad \text{und} \quad \triangle a_3' a_5' a_1'$$

bezüglich dem Punkt $a_{13}' = a_{25}'$ zentralperspektivisch und somit auch axialperspektivisch: Achse ist die Gerade A , da sich die entsprechenden Seiten $\overline{a_1 a_3}$ und $\overline{a_3' a_1'}$ sowie $\overline{a_2 a_3}$ und $\overline{a_5' a_1'}$ in den Punkten a_{13} bzw. $a_{23} = a_{15}$ schneiden. Für das letzte Paar entsprechender Seiten gilt aber:

$$A \cap \overline{a_1 a_2} = a_{12} = a_{34} \neq a_{35} = \overline{a_3' a_5'} \cap A$$

im Widerspruch zum Satz von Desargues.

Aus

$$a_{13}', a_{25}' \in B \cap C$$

folgt daher

$$B = C = \overline{a_{12} a_{15}} = A.$$

(iii) Es gilt jetzt:

$$\pi_1 = [K, a_1, A][A, a_1', K] = [K, a_1', A][A, a_1, K] = \pi_2 :$$

Die Projektivitäten π_1 und π_1^{-1} von K auf sich vertauschen beide die Punkte a_2 und a_2' sowie a_3 und a_3' , so daß $\pi_1 = \pi_1^{-1}$ aus (P_4^*) folgt. Insbesondere vertauscht dann π_1 wegen

$$(a_1')\pi_1 = a_1 \quad \text{auch die Punkte } a_1 \text{ und } a_1'.$$

Bei jeder beliebigen Wahl der Sekante $\overline{a_3 a_3'}$ verschieden von $\overline{a_2 a_2'}$ und $\overline{a_1 a_1'}$ im Fall $J = \emptyset$ bzw. der Sekante $\overline{a_1 a_1'}$ verschieden von $\overline{a_2 a_2'}$ und $\overline{a_3 a_3'}$ im Fall $J \neq \emptyset$ ist die Gerade A unabhängig davon durch $A = \overline{a_{12} a_{12}'}$ im ersten Fall bzw.

durch $A = \overline{a_{23}a_{23}^*}$ im zweiten Fall eindeutig festgelegt;
Die (nur im zweiten Fall von $\overline{a_1a_1^*}$ abhängigen) Projektivitäten π_1 vertauschen stets die Punkte a_1 und a_1^* , a_2 und a_2^* sowie a_3 und a_3^* , sind also mit (P_4^*) alle gleich.

Daraus ergibt sich die Behauptung $\pi_1 = \iota_z$, wenn wir noch
 $a \in K \cap A \neq \emptyset$

zeigen, falls eine Tangente mit Berührungspunkt a auf K durch z existiert:

Im Fall $\text{char } \overline{\mathbb{B}}_{\infty} = 2$ folgt dies mit Lemma (5.3) aus

$$(a_1)\pi_1 = a_1^* \text{ d.h. } \text{Tg}(a_1, K) \cap \text{Tg}(a_1^*, K) \in A,$$

denn als Sekante käme A nur noch in Frage, wenn A mindestens einen der Punkte u_j mit $J \neq \emptyset$ enthielte.

Im Fall $\text{char } \overline{\mathbb{B}}_{\infty} \neq 2$ stellen wir zunächst fest, daß die Punkte a_1, a_1^*, z und $\overline{a_1a_1^*} \cap A$ verschieden sind und ein harmonisches Punktequadrupel bilden.

Angenommen, es gilt $a \in A$; Wegen $z \in \mathbb{D}$ im Fall $J \neq \emptyset$ ist $a \neq u_j$.

Mit $a =: a_6$ folgt

$$\overline{a_1a_6} \cap A =: a_{16} \neq a_{16}^* := \overline{a_1^*a_6} \cap A.$$

Wegen

$$(K \cap \overline{a_1^*a_{16}}) \setminus \{a_1^*\} = (a_6)\pi_1 = (a_6)\pi_1^{-1} = (K \cap \overline{a_1a_{16}^*}) \setminus \{a_1\}$$

liegt der Punkt

$$a_6^* := \overline{a_1a_{16}} \cap \overline{a_1^*a_{16}^*}$$

auf K und ist von a_6 sowie von a_1 und a_1^* verschieden.

Damit bilden die Punkte a_{16}, a_6, a_{16}^* und a_6^* ein nicht triviales Viereck mit a_1 und a_1^* als Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten und $\overline{a_6a_6^*}$ sowie $\overline{a_{16}a_{16}^*} = A$ als Diagonalen, so daß auch die vier Punkte $a_1, a_1^*, \overline{a_1a_1^*} \cap \overline{a_6a_6^*}$

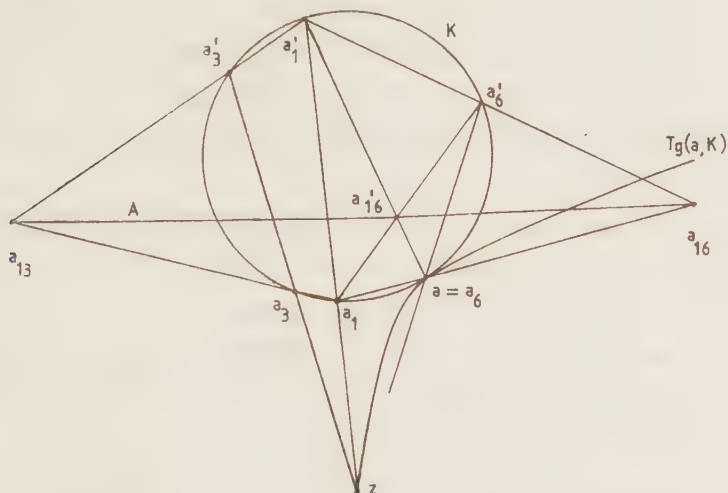
und $\overline{a_1 a'_1} \cap A$ ein harmonisches Punktequadrupel auf $\overline{a_1 a'_1}$ bilden. Aus der Eindeutigkeit des Doppelverhältnisses folgt

$$\overline{a_1 a'_1} \cap \overline{a_6 a'_6} = z$$

im Widerspruch zu

$$\overline{za_6} = \text{Tg}(a_6, K) .$$

Daher gilt also $a \in K \cap A \neq \emptyset$.



(5) Korollar: Jedes Oval \$K\$ aus \$\mathbb{K}'_\infty\$ ist in \$\overline{\mathbb{B}}_\infty\$ ein Kegelschnitt.

Beweis: Die Büschelinvolution $\iota_z = \pi_1$ aus (4) gestattet eine weitere Interpretation als Projektivität von \$K\$ auf sich: Mit den Bezeichnungen aus (4) und einer festen Wahl von $\overline{a_1 a'_1}$ im Fall $J \neq \emptyset$ (verschieden von $\overline{a_2 a'_2}$ und $\overline{a_3 a'_3}$) sei

$$\iota := \iota(a_{12}, a'_{12}; a_{13}, a'_{13}) ,$$

$$\sigma := [A, a_1, K] \quad \text{und}$$

$$\sigma' := [A, a'_1, K] .$$

Dann vertauschen die Projektivitäten

$$\pi := \sigma^{-1} \iota \sigma \quad \text{und} \quad \pi' := (\sigma')^{-1} \iota \sigma'$$

von K auf sich beide die Punkte a_2 und a'_2 sowie a_3 und a'_3 ,
so daß mit $(P_4^{\mathbb{K}})$ folgt:

$$\pi = \pi' = \pi_1 = \iota_2.$$

Dadurch erhalten wir eine Projektivität des Geradenbüschels
mit dem Zentrum a_1 auf das Geradenbüschel mit Zentrum a'_1 :
Jeder Geraden G durch a_1 wird die Verbindungsgerade G' der
Punkte a'_1 und $(G \cap A) \iota$ zugeordnet. Dann ist das Oval K ein
(Steinerscher) Kegelschnitt in $\overline{B}_0$, vgl. [15], Seite 56,
denn es gilt $G \cap G' \in K$:

Zum Beweis der letzten Behauptung folgern wir zunächst

$$\sigma = \sigma' \pi \quad \text{aus}$$

$$\pi = \pi_1 = (\sigma')^{-1} \sigma, \text{ vgl. (4)(iii).}$$

Für jede von $Tg(a_1, K)$ und $\overline{a_1 a'_1}$ verschiedene Gerade G
durch a_1 folgt damit:

$$\begin{aligned} (G \cap K \setminus \{a_1\}) \pi &= (G \cap A) \iota \sigma = (G' \cap A) \sigma = \\ &= (G' \cap A) \sigma' \pi = (G' \cap K \setminus \{a'_1\}) \pi' \end{aligned}$$

und damit

$$G \cap K \setminus \{a_1\} = G' \cap K \setminus \{a'_1\},$$

also $G \cap G' \in K$.

Für $G = Tg(a_1, K)$ schließlich folgt

$$(G \cap A) \iota = \overline{a_1 a'_1} \cap A$$

aus (4) und somit $G' = \overline{a_1 a'_1}$ sowie für $G = \overline{a_1 a'_1}$ analog
 $G' = Tg(a'_1, K)$.

(6) Wir befreien uns noch von der Einschränkung $\text{Ord. } \overline{B}_0 \cong 16$.

Für die pappossche projektive Ebene $\overline{B}_0$ kommen als Ordnung
unterhalb von 16 nur noch die entsprechenden Primzahlpoten-

zen in Frage.

Nach dem Satz von Segre [21] sind in endlichen papposschen projektiven Ebenen ungerader Ordnung alle Ovale bereits Kegelschnitte, so daß wir nur noch die Ordnung 8 betrachten müssen, denn die Benz-Ebenen der Ordnung 2 und 4 sind alle miquelsch, vgl. [6] und [24].

(7) Lemma: Sei $\mathbb{B}$ eine Benz-Ebene der Ordnung 8.

Ein nicht triviales Viereck von $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{O}}$ sei in einem Oval K aus $\mathbb{K}'_{\mathbb{O}}$ eingeschrieben, und die Verbindungsgerade G der drei Diagonalepunkte (char $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{O}} = 2$) enthalte die Punkte u_j nicht bzw. sei von U verschieden im Fall $J = \emptyset$. Dann besteht $G \cap K$ höchstens aus einem Punkt.

Beweis: Wir können o.E. annehmen, daß die beiden Eckpunkte a_1 und a_2 des Vierecks $\square a_1 a_2 a_3 a_4$ auf K eigentlich sind, und daß die Verbindungsgerade G der Diagonalepunkte

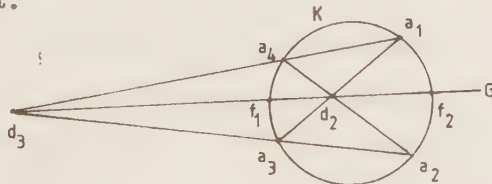
$d_1 = \overline{a_1 a_2} \cap \overline{a_3 a_4}$, $d_2 = \overline{a_1 a_3} \cap \overline{a_2 a_4}$, $d_3 = \overline{a_1 a_4} \cap \overline{a_2 a_3}$
 K in den zwei eigentlichen Punkten f_1 und f_2 schneidet. Sei

$$\sigma_1 := [G, a_1, K] \quad \text{und} \quad \sigma_2 := [G, a_2, K]:$$

Dann vertauschen die (involutorischen) Projektivitäten

$$\sigma_1 \sigma_2^{-1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 \sigma_1^{-1}$$

von G auf sich beide die Punkte d_2 und d_3 und lassen die Punkte f_1 und f_2 fest, woraus sich der Widerspruch mit den Argumenten des letzten Abschnittes des Beweises zu Lemma (5.3) ergibt.



(8) Lemma: Sei $\mathbb{B}$ eine Benz-Ebene der Ordnung 8 mit (P_4) für Π_e . Dann ist jedes Oval K aus $\mathbb{K}'_{\omega}$ ein Kegelschnitt von $\mathbb{B}_{\omega}$.

Beweis: Wir wählen auf K einen Punkt a mit

$$u_j \nmid a \notin D,$$

auf $K \setminus \{a\}$ zwei Punkte b und c derart, daß

$$\overline{bc} \cap \text{Tg}(a, K) \nsubseteq U \quad \text{im Fall } J = \emptyset \quad \text{bzw.}$$

$$D \subseteq \overline{bc} \quad \text{im Fall } J \neq \emptyset \quad \text{gilt,}$$

nennen den Punkt

$$\overline{bc} \cap \text{Tg}(a, K) =: z$$

und wählen eine weitere Sekante $\overline{zde}$ von K .

Die Diagonalepunkte des (nicht trivialen) Vierecks $\square bcde$ neben z seien

$$z_2 := \overline{bd} \cap \overline{ce} \quad \text{und} \quad z_3 := \overline{be} \cap \overline{cd},$$

ihre Verbindungsgerade $G := \overline{z_3 z_2 z}$ ist im Fall $J = \emptyset$ von U verschieden bzw. enthält im Fall $J \neq \emptyset$ die Punkte u_j nicht.

Wir wählen eine weitere Sekante $\overline{zfg}$ von K .

Dann folgt zunächst $G \nsubseteq \overline{zfg}$ aus (7), so daß höchstens eine der beiden Geraden $\overline{z_2 f}$ und $\overline{z_2 g}$ Tangente an K durch z_2 sein kann; o.B.d.A. existiere auf $\overline{z_2 f}$ außer f noch ein zweiter Schnittpunkt mit K , den wir h nennen. Schließlich sei $r := \overline{hz} \cap \overline{gz_2}$.

Ein analoger Beweis wie zu (3) liefert $r \in K$.

Ferner folgt $\overline{az_2} = \overline{az}$, denn andernfalls wäre $\overline{az_2}$ eine Sekante von K , und es folgte $|K| = 10$.

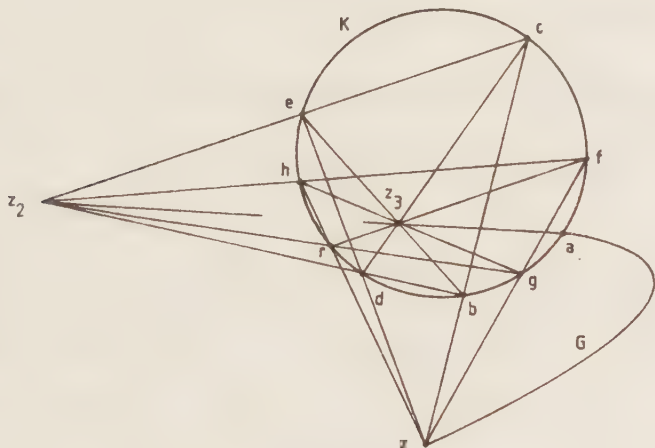
Weiter folgt

$$z_3 = z_4 := \overline{fr} \cap \overline{gh},$$

denn andernfalls folgte mit Hilfe der Bijektion

$$[zz_2, f, K]$$

wieder $|K| = 10$.



Insgesamt folgt mit den Bezeichnungen aus (3) aus $(P_4^{\mathbb{K}})$

$$\iota_z \iota_{z_2} = \iota_{z_2} \iota_z = \iota_{z_3} = \pi_1^i,$$

d.h. ι_{z_3} läßt sich als eigentliche Projektivität auffassen.

Analog wie in (4) finden wir schließlich mit

$$\text{Tg}(f, K) \cap \text{Tg}(r, K) =: t \in G = \text{Tg}(a, K)$$

wegen Lemma (5.3) folgende Darstellung von ι_{z_3} :

$$\begin{aligned} [K, f, \overline{zz_2}] \iota(z, z_2; z_3, t) [\overline{zz_2}, f, K] = \\ [K, r, \overline{zz_2}] \iota(z, z_2; z_3, t) [\overline{zz_2}, r, K], \end{aligned}$$

mit deren Hilfe wir K als (Steinerschen) Kegelschnitt von $\overline{\mathbb{B}}_0$ erkennen.

(5.5) Korollar: Eine Laguerre- oder Minkowski-Ebene ist miquelsch, wenn die Gruppe der eigentlichen Projektivitäten vier-regulär operiert.

Zum Beweis vgl. etwa [11], Seite 49, Fußnote.

(5.6) Korollar: In einer Möbius-Ebene $\mathbb{B}$ mit (P_4) für Π_e läßt sich jede Büschelinvolution ι_z eines Ovals K aus $\mathbb{K}'_{\omega}$ auf sich als eigentliche Projektivität auffassen.

Beweis: Nach (5.4) ist K ein Kegelschnitt von $\mathbb{B}_{\omega}$ und daher ein pascalsches Oval (vgl. etwa [15], Seite 60, Satz 3.2), so daß ι_z sich nach [4], Lemma 4.2, auf eindeutige Weise zu einer zentralen Kollineation von $\mathbb{B}_{\omega}$ mit Zentrum z erweitern läßt. Dann folgt für je zwei Sekanten $\overline{zab}$ und $\overline{zcd}$ von K , die in Möbiusebenen stets von U verschieden sind:

Die zentrale Kollineation ι_z induziert auf $\overline{zab}$ eine Projektivität $\pi(\iota_z)$ (vgl. etwa [15], Seite 33, Hilfssatz 5.7), und aus den Eigenschaften einer zentralen Kollineation folgt schließlich

$$\iota_z = [K, c, \overline{zab}] \pi(\iota_z) [\overline{zab}, d, K] .$$

Wir haben dabei stillschweigend die Tatsache mitbenutzt, daß alle Möbius-Ebenen einer Ordnung kleiner als 8 bereits miquelsch sind; vgl. [5], [6], [7], [11] und [24].

(5.7) Satz: Eine Möbius-Ebene ist miquelsch, wenn die Gruppe der eigentlichen Projektivitäten vier-regulär operiert.

Beweis: Wir wenden eine Beweisidee von H.-J.Kroll für ein analoges Problem ([13], Seite 412) auf Büschelinvolutionen an:

Dazu wählen wir einen festen Kreis A der Möbius-Ebene

$$\mathbb{B} = (\mathbb{P}, \mathbb{K}, \emptyset) = (\mathbb{P}, \mathbb{K})$$

mit $\omega \notin A$. In der papposschen projektiven Ebene $\overline{\mathbb{B}}_{\omega}$ sind alle Punkte des vom Kreis A induzierten Ovals A eigentlich, und es existiert daher in $\mathbb{B}$ eine Teilmenge $\mathbb{K}'$ der Potenzmenge von $\mathbb{P}$ mit $A \in \mathbb{K}'$ und

$$\{K \in \mathbb{K} / \omega \in K\} = \{L \in \mathbb{K}' / \omega \in L\},$$

so daß $\mathbb{B}' := (\mathbb{P}, \mathbb{K}', \emptyset)$ eine miquelsche Möbius-Ebene ist; vgl. [23].

Es gilt $\mathbb{K}' = \mathbb{K}$.

Zum Beweis der letzten Behauptung genügt es zu zeigen, daß für jeden Kreis $B \in \mathbb{K}$ mit $\omega \notin B$ und $|A \cap B| = 2$ auch $B \in \mathbb{K}'$ gilt. Mit der Schlußbemerkung zum Beweis zu (5.6) dürfen wir außerdem $\text{Ordn.} \overline{\mathbb{B}}_{\omega} \geq 8$ voraussetzen.

Es seien a und b die Schnittpunkte von A und B , ferner

$$c := (a, A; \omega) \cap B \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Dann existieren wegen der hinreichend großen Ordnung stets die sechs Punkte

$$d_1, d_2 \in B \setminus \{a, b, c\} \text{ sowie}$$

$$e_1, f_1, e_2, f_2 \in A \setminus \{a, b\},$$

so daß gilt

$$e_i, f_i \in A_i := (c, d_i, \omega)$$

mit $i = 1, 2$, wobei wir für $\text{char } \overline{\mathbb{B}}_{\omega} = 2$ als einzige Ausnahme den Fall

$$c \in (a, A; \omega) \cap (b, A; \omega)$$

o.B.d.A weglassen.

Insbesondere sind die Punkte

$$g_i := (a, b, \omega) \cap A_i \setminus \{\omega\}$$

bzw. $g_i := \omega$ im Fall

$$(a, b, \omega) \cap A_i = \{\omega\},$$

was höchstens für ein $i \in \{1, 2\}$ vorkommen kann, von den Punkten c, d_i, e_i und f_i verschieden.

Die Büschelinvolutionen ι_i der Kreise A_i auf sich mit dem Zentrenpaar a, b vertauschen die Punkte c und d_i , e_i und f_i sowie g_i und ω (oder lassen ω fest im Fall $g_i = \omega$). Die Bildpunkte c^{i_1} von c sind in $\overline{B}_\omega$ wegen (P_4^Σ) bereits durch die projektiven Involutionen

$$\iota'_i := \iota(e_i, f_i; g_i, A_i \cap U)$$

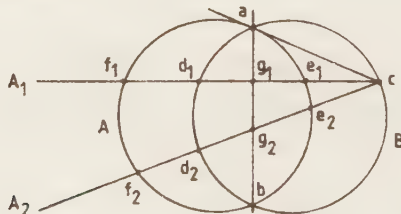
von A_i auf sich eindeutig bestimmt, vgl. (5.2) und (1.8).

Es sei $B' \in \mathbb{K}'$ mit $B' = (a, b, c)$.

Da die Gruppe Π'_e der miquelschen Möbius-Ebene $\mathbb{B}'$ sogar dreiregular operiert (vgl. [13]), sind auch in $\overline{B}'_\omega = \overline{B}_\omega$ die Bilder des Punktes c unter den Büschelinvolutionen von A_i mit dem Zentrenpaar a, b bereits durch die projektiven Involutionen ι'_i festgelegt, also liegen d_1 und d_2 auf B' .

Da B und B' Kegelschnitte sind, und a, b, c, d_1 und d_2 fünf Punkte aus $B \cap B'$, folgt nach [14], Seite 59, Satz 3.1 :

$$B = B' \in \mathbb{K}'.$$



Literaturverzeichnis

- [1] A.Barlotti: Sul gruppo delle proiettività di una retta in sé nei piani liberi e nei piani aperti, Rend.Sem. Mat.Padova 34, 135-159 (1964)
- [2] A.Barlotti, E.Schreiber und K.Strambach: The Group of Projectivities in Free-Like Geometries, Rend.Sem.Mat. Padova 60, 183-200 (1978)
- [3] W.Benz: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
- [4] F.Bueckenhout: Plans projectifs à ovoïdes Pascaliens, Arch.Math. 17, 89-93 (1966)
- [5] Y.Chen: The Steiner System $S(3,6,26)$, J.Gem. 2, 7-28 (1972)
- [6] Y.Chen und G.Kaerlein: Eine Bemerkung über endliche Laguerre- und Minkowski-Ebenen, Geometriae Dedicata 2, 193-194 (1973)
- [7] R.H.F.Denniston: Uniqueness of the Inversive Plane of Order 7, Manuscr.Math. 8, 21-26 (1973)
- [8] H.Freudenthal und K.Strambach: Schließungssätze und Projektivitäten in der Möbius- und Laguerregeometrie, Math.Z. 143, 213-234 (1975)
- [9] R.Fritsch: Ein "affiner" Beweis des Satzes von v.Staudt-Schleiermacher, Mh.Math. 86, 177-184 (1978)
- [10] M.Hall: The Theory of Groups, New York: The Macmillan Company, Seventh Printing 1965
- [11] W.Heise und H.Seybold: Das Existenzproblem der Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Erweiterungen endlicher affiner

- Ebenen, Sitz.Ber.Bayer.Akad.Wiss.,Math.Nat.Kl. 1975, 43-58
- [12] W.Heise und K.Sörensen: Freie Minkowski-Ebenenerweiterungen, J.Geom. 3, 1-4 (1973)
- [13] H.-J.Kroll: Die Gruppe der eigentlichen Projektivitäten in Benz-Ebenen, Geometriae Dedicata 6, 407-413 (1977)
- [14] H.-J.Kroll: Perspektivitäten in Benz-Ebenen, in: Beiträge zur geometrischen Algebra, 203-207, Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1977
- [15] H.Lenz: Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1965
- [16] G.Pickert: Projektive Ebenen, Berlin-Heidelberg-New York, zweite Auflage: Springer 1975
- [17] A.Schleiermacher: Bemerkungen zum Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, Math.Z. 99, 299-304 (1967)
- [18] A.Schleiermacher und K.Strambach: Über die Gruppe der Projektivitäten in nichtgeschlossenen Ebenen, Arch. Math. 18, 299-307 (1967)
- [19] A.Schleiermacher und K.Strambach: Freie Erweiterungen in der affinen Geometrie und der Geometrie der Kreise (II), Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 34, 209-226 (1970)
- [20] E.Schreiber: Freie Strukturen und die Gruppe der affinen Projektivitäten, Dissertation, Erlangen 1979
- [21] B.Segre: Ovals in Finite Projective Planes, Can.J.Math. 7, 414-416 (1955)
- [22] G.K.Ch.v.Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg: Verlag von Bauer und Raspe 1847
- [23] B.L.v.d.Waerden und L.J.Smid: Eine Axiomatik der Kreis-

geometrie und der Laguerre-Geometrie, Math. Ann. 110,
753-776 (1935)

- [24] E. Witt: Über Steinersche Systeme, Abh. Math. Sem. Univ.
Hamburg 12, 265-275 (1938)

Lebenslauf

Name	Martin Funk
Geboren	am 21. März 1953 in Erlangen
Eltern	Ferdinand Funk und Ehefrau Hildegard, geb. Kohlert
Beruf des Vaters	Studiendirektor
Schulen	1959 - 1963 Friedrich-Rückert-Schule, Erlangen 1963 - 1972 Gymnasium Fridericianum Erlangen
Schulabschluß	Abitur 1972
Studium	2 Semester Elektrotechnik 1972 - 1973 Universität Erlangen-Nürnberg 11 Semester Mathematik und Physik für das Lehramt an Gymnasien 1973 - 1979 Universität Erlangen-Nürnberg
Prüfungen	Vorprüfung im Frühjahr 1976 Prüfung in Erziehungswissenschaften im Frühjahr 1977 Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien im Juni 1979
Stellungen	einjährige Tätigkeit als nebenberufliche Lehrkraft am Gymnasium Fridericianum Erlangen 1976/77 Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathe- matischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg seit Juni 1979

Harry Bungsche
offsetdruck
ERLANGEN-BUBENREUTH